
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



Mestrado em Matemática Pura e Aplicada

**REDES DE SISTEMAS DINÂMICOS
ACOPLADOS COM ESTRUTURA GRADIENTE
OU HAMILTONIANA**

Antonio Edimar de Melo Junior

São José dos Campos

2020

Antonio Edimar de Melo Junior

**REDES DE SISTEMAS DINÂMICOS
ACOPLADOS COM ESTRUTURA GRADIENTE
OU HAMILTONIANA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Paulo – Instituto de Ciência e Tecnologia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador:

Prof. Dr. Fernando Martins Antoneli Junior

São José dos Campos

2020

de Melo Junior, Antonio Edimar

Redes de Sistemas Dinâmicos Acoplados com Estrutura Gradiente ou Hamiltoniana / Antonio Edimar de Melo Junior. – São José dos Campos, 2020.

xiv, 119f.

Dissertação (Mestre) – Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Título em inglês: Coupled Dynamical System Networks with Gradient or Hamiltonian Structure.

1. Redes acopladas. 2. Hamiltoniano. 3. Gradiente. 4. Bifurcações locais. 5. Dinâmica. 6. Equilíbrio.

Universidade Federal de São Paulo
Instituto de Ciência e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e
Aplicada

Chefe do Departamento: Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa: Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello

Apoio Financeiro: Capes-PICME

Antonio Edimar de Melo Junior

**REDES DE SISTEMAS DINÂMICOS
ACOPLADOS COM ESTRUTURA GRADIENTE
OU HAMILTONIANA**

Presidente da banca:

Prof. Dr. Fernando Martins Antoneli Junior

Banca examinadora:

Prof. Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau

Prof. Dr. Guilherme da Costa Pereira Innocentini

Prof. Dr. Llohann Dallagnol Sperança

A minha mãe,
Natália.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Fernando Antoneli, meu orientador, pela disponibilidade, atenção e paciência compartilhando seu conhecimento comigo e tornando assim possível a realização desse trabalho.

Aos amigos que encontrei na universidade. Em especial, aos amigos de pós-graduação Cassia, Pedro, George e Sarah pelas conversas aleatórias e momentos de descontração.

A todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica.

A todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho e que por ventura eu possa não ter lembrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 com bolsa através do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).

*Desistir? Eu já pensei seriamente nisso, mas nunca me levei realmente a sério.
É que tem mais chão nos meus olhos do que cansaço nas minhas pernas,
mais esperança nos meus passos do que tristeza nos meus ombros,
mais estrada no meu coração do que medo na minha cabeça.*

Cora Coralina

RESUMO

Uma recente generalização da noção de simetria vinda da teoria de grupos substitui as simetrias globais por bijeções entre certos subconjuntos do digrafo de uma rede, os “conjuntos de entradas”. Um grupo de simetria se torna um grupoide e esse formalismo torna possível estender os métodos da teoria de grupos a redes mais gerais e, em particular, leva a uma classificação de padrões de sincronia em termos da estrutura da rede. Uma rede de sistemas dinâmicos é equipada com um conjunto canônico de observáveis para os estados de seus nós individuais. Além disso, a forma da ODE subjacente é limitada pela topologia da rede e como essas equações se relacionam. Para os sistemas acoplados associados a uma rede, pode haver espaços fluxo-invariantes (subespaços de sincronia onde alguns subsistemas evoluem de forma síncrona), cuja existência é independente das equações do sistema e depende apenas da topologia da rede. Em adição, qualquer sistema acoplado da rede, quando restrito a esse subespaço de sincronia, determina um novo sistema acoplado associado a uma rede menor (quociente). Uma rede regular é uma rede com um tipo de nó e um tipo de acoplamento. Mostramos condições para uma bifurcação de codimensão 1 de uma rede regular oriunda de um equilíbrio síncrono em nível linear ser isomorfa a um autoespaço generalizado da matriz de adjacência da rede. Em seguida, focamos em sistemas de células acopladas, nos quais células individuais também são gradientes ou hamiltonianas. Em termos gerais, provamos que apenas sistemas com digrafos acoplados bidirecionalmente podem ser do tipo gradiente ou hamiltoniano. Caracterizamos condições para que a propriedade de um sistema acoplado ser gradiente ou hamiltoniano seja preservada pelo sistema acoplado “quociente”. Além dos critérios topológicos, também estudamos a teoria linear de redes regulares de sistemas de células acopladas do tipo gradiente (hamiltoniano). Em seguida, provamos resultados em bifurcações de estado estacionário e uma versão do Lema de Ramificação Equivariante e do Teorema de Hopf Equivariante. Ilustramos uma rede neural fornecida por dois conjuntos de neurônios que são mutuamente acoplados por sinapses excitatórias ou inibitórias, modelados por um sistema acoplado que exhibe estruturas gradiente e Hamiltoniana, e como soluções periódicas de equilíbrio aparecem no Problema Restrito dos Três Corpos.

Palavras-chave: Redes acopladas. Hamiltoniano. Gradiente. Bifurcação local. Dinâmica. Equilíbrio.

ABSTRACT

A recent generalization of the group-theoretic notion of symmetry replaces global symmetries by bijections between certain subsets of the digraph of a network, the “input sets”. A symmetry group becomes a groupoid and this formalism makes it possible to extend group-theoretic methods to more general networks, and in particular it leads to a classification of patterns of synchrony in terms of the structure of the network. A network of dynamical systems is equipped with a canonical set of observables for the states of its individual nodes. Moreover, the form of the underlying ODE is constrained by the network topology and how those equations relate to each other. For the coupled systems associated with a network, there can be flow-invariant spaces (synchrony subspaces where some subsystems evolve synchronously), whose existence is independent of the systems equations and depends only on the network topology. Furthermore, any coupled system on the network, when restricted to such a synchrony subspace, determines a new coupled system associated with a smaller network (quotient). A regular network is a network with one kind of node and one kind of coupling. We show conditions for a codimension one bifurcation from a synchronous equilibrium in a regular network at linear level be isomorphic to a generalized eigenspace of the adjacency matrix of the network. We then focus on coupled cell systems in which individual cells are also gradient or Hamiltonian. In broad terms, we prove that only systems with bidirectionally coupled digraphs can be gradient or Hamiltonian. We characterize the conditions for the coupled systems property of being gradient or Hamiltonian to be preserved by the lift and quotient coupled systems. Aside from the topological criteria, we also study the linear theory of regular gradient (Hamiltonian) coupled cell systems. We then prove results on steady-state bifurcations and a version of the Equivariant Branching Lemma and the Equivariant Hopf Theorem. We illustrate a neural network given by two sets of neurons that are mutually coupled through either excitatory or inhibitory synapses, which is modelled by a coupled system exhibiting both gradient and Hamiltonian structures, and how periodic solutions from equilibrium appear in the Restricted Three Body Problem.

Keywords: Coupled networks. Hamiltonian. Gradient. Local bifurcation. Dynamics. Equilibrium.

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{G}	Rede de células (sistemas dinâmicos) acopladas	12
\mathcal{C}	Conjunto de células	12
\mathcal{S}	Conjunto de setas	12
$\mathcal{H}(s)$	Função cabeça (head) da seta s	12
$\mathcal{T}(s)$	Função cauda (tail) da seta s	12
$\sim_{\mathcal{C}}$	Relação de equivalência nas células em \mathcal{C}	12
$\sim_{\mathcal{S}}$	Relação de equivalência nas setas em \mathcal{S}	12
$I(c)$	Conjunto de entrada da célula c	13
\sim_E	Relação de equivalência por entradas	14
$B(c, d)$	Conjunto dos isomorfismos de entradas da célula c para a célula d	15
$\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$	Grupoide de simetria da rede \mathcal{G}	15
$[E]$	Classe de \sim_E -equivalência	15
$\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P$	Conjunto dos campos vetoriais \mathcal{G} -admissíveis em P	21
$\sigma(x)$	Permutação das componentes de x	26
κ	Coloração / partição do conjunto de células \mathcal{C}	29
Δ_{κ}	Subespaço de sincronia (polidiagonal) definido pela coloração κ	30
\bowtie	Relação de equivalência balanceada	34

τ_{cd}	Símbolo de entrada de (c, d)	36
$A_{\mathcal{G}}$	Matriz de adjacência da rede \mathcal{G}	39
\mathcal{I}	Classe de \bowtie -equivalência	40
J	Matriz Jacobiana	43
$E(\lambda_m)$	Espaço de Lyapunov de λ_m	43
E^c	Subespaço central	43
\otimes	Produto tensorial ou de Kronecker	45
Φ	Matriz da dinâmica interna linearizada	46
Ψ	Matriz de acoplamento linearizado	46
(Φ, Ψ)	Par de codimensão um	47
$\mathcal{L}_2(k)$	Conjunto dos pares de codimensão um de ordem k	47
$\mathcal{M}(k)$	Espaço das matrizes reais de ordem k	47
$E_{\mu}(A)$	Autoespaço generalizado associado ao autovalor μ de A	47
∇f	Gradiente da função f	63
\mathcal{J}	Matriz Jacobiana de redes hamiltonianas	73
$\eta_{\mathbb{R}}$	Conjunto dos autovalores reais não-nulos de uma matriz hamiltoniana	74
$G_{\mathcal{J}}(\eta)$	Autoespaço generalizado associado ao autovalor η de \mathcal{J}	75
$\text{sgn}(H)$	Assinatura de Krein da forma quadrática H	75
Ω	Forma simplética associada a uma estrutura hamiltoniana	80

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS	1
Estrutura da Dissertação	5
1.1 Diagramas de Rede	5
1.1.1 Motivação	5
1.1.2 Modelagem	9
1.2 Sistemas e Redes de Células Acopladas	11
1.3 Grupoide de Simetria de uma Rede	13
1.3.1 Estrutura de $B(c,d)$	15
1.4 Campos Vetoriais Admissíveis	16
1.4.1 Espaços de Fase	16
1.4.2 Funções Admissíveis	17
1.4.2.1 Funções Fortemente Admissíveis	20
1.4.3 Espaço dos Campos Vetoriais \mathcal{G} -admissíveis	21
1.5 EDO-equivalência e linear-equivalência	22
1.6 Simetrias Globais	26
1.7 Redes Quocientes e Sincronia	27
1.7.1 Colorações Balanceadas	29
1.7.2 Teorema do Levantamento	32
1.7.2.1 Interpretação Matricial	35

CAPÍTULO 2 – REDES REGULARES E TEORIA LINEAR	38
2.1 Redes Regulares	38
2.1.1 Quocientes e Levantamentos de Redes Regulares Bidirecionais	39
2.2 Bifurcações de Codimensão Um	42
2.2.1 Subespaços Centrais em Redes Regulares	44
2.3 Ramificações de Soluções	55
2.4 Bifurcações de Soluções Síncronas Estáveis	59
CAPÍTULO 3 – SISTEMAS GRADIENTES E HAMILTONIANOS	63
3.1 Sistemas Gradientes	63
3.1.1 Funções Admissíveis	65
3.2 Sistemas Hamiltonianos	69
3.2.1 Relação entre Sistemas Gradientes e Hamiltonianos	72
3.3 Autoespaços de Redes Hamiltonianas	72
3.3.1 Pares de Codimensão Um em Sistemas Hamiltonianos	74
3.4 Bifurcações de Equilíbrio com Codimensão Um	79
3.4.1 Teorema do Centro de Lyapunov para Redes Hamiltonianas	84
CAPÍTULO 4 – PERSPECTIVAS DE APLICAÇÕES	85
4.1 Redes Neurais com Acoplamento Sináptico Excitatório e Inibitório	86
4.2 O Problema Restrito dos Três Corpos	89
REFERÊNCIAS	93
APÊNDICE A – COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR	99
A.1 Autoespaços generalizados	99
A.2 Propriedades do Produto Tensorial	101
APÊNDICE B – FORMAS SIMPLÉTICAS E EQUAÇÕES DE HAMILTON	102

Capítulo 1

INTRODUÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS

Se nossos cérebros fossem simples o suficiente para os entendermos, seríamos tão simples que não conseguiríamos. [23, p. 3].

A alguns anos, uma analogia entre sistemas dinâmicos simétricos [51] e dinâmica de redes começou a ser explorada [48, 52, 86]. O objetivo era aplicar, num contexto de redes, a filosofia moderna de dinâmica não-linear. Tal abordagem foi introduzida por Poincaré [72] em seu trabalho sobre a teoria qualitativa de equações diferenciais. Junto com outras coisas, esse ponto de vista o guiou na descoberta da dinâmica caótica no problema dos três corpos na gravitação newtoniana [73–75]. Sua abordagem qualitativa para equações diferenciais foi desenvolvida numa sistemática teoria por vários matemáticos, especialmente na União Soviética, e se estabeleceu firmemente como uma nova ramificação matemática com o trabalho de Arnold [9] e Smale [77], dentre outros. A ideia central nessa abordagem é que fenômenos estruturais relevantes são invariantes por mudanças de coordenadas apropriadas, de modo a serem determinados puramente pela topologia das trajetórias no espaço de fase. Por exemplo, a presença de um estado periódico, como um ciclo limite, é uma propriedade topológica, mas o padrão de onda detalhado, o período e a forma do ciclo no espaço de fase não são.

Essa abordagem deliberadamente ignora vários detalhes do sistema que têm de ser supridos por outros meios, usualmente por soluções numéricas já que poucas EDOs não-lineares interessantes podem ser resolvidas explicitamente. Então por que precisamos de dinâmica topológica quando qualquer problema pode ser entendido por computação numérica? Frequentemente não precisamos: simulações numéricas providenciam muitas das respostas requeridas. Porém, soluções numéricas algumas vezes fazem pouco sentido por si só (elas revelam alguma forma de comportamento mas não explicam porque isso surgiu, ou se é algo típico ou incomum no contexto apropriado). Além disso, muitos modelos do mundo real incluem parâmetros que podem ter muitos valores, tornando importante entender como as soluções mudam a me-

didada que esses parâmetros variam. Algumas abordagens numéricas existem para explorar essas questões, mas em geral, tais questões podem exigir cálculos demasiadamente longos. Além do mais, pode ser difícil organizar os resultados dentro de uma descrição sensível ao comportamento do sistema. Dinâmica topológica pode ajudar nisso por fornecer um contexto sistemático para organizar, classificar e reconhecer tipos básicos de comportamento, permitindo assim que um padrão seja transferido de uma área de aplicação para outras.

Os pioneiros do assunto perceberam que a abordagem topológica pode ser altamente eficaz para uma básica, porém geral questão: o que sistemas dinâmicos podem fazer? O efeito dessa mudança de ponto de vista foi um pouco como o movimento zoológico da coleta de borboletas para a taxonomia lineana. Pós-Lineu, você ainda tinha que coletar borboletas para descobrir o que existia na natureza, mas começou a apreciar como elas se relacionavam com outras borboletas e, mais crucialmente, com outras espécies.

Muitas classes especiais de sistemas dinâmicos carregam estruturas adicionais específicas. Por exemplo, sistemas dinâmicos simétricos são definidos por campos vetoriais equivariantes com propriedades simétricas específicas. Sistemas hamiltonianos são definidos por uma função hamiltoniana que é conservada ao longo de trajetórias e induz uma estrutura simplética [77]. Em redes de sistemas dinâmicos acoplados, as variáveis que aparecem nas equações diferenciais e a forma das equações respeitam a arquitetura da rede. Quando o sistema apresenta estrutura especial, é sensato exigir que mudanças de coordenadas adequadas preservem essa estrutura. Essa restrição pode levar a novos fenômenos invariantes por esse tipo de mudança de coordenadas mais limitado. Exemplos disso nos três contextos mencionados são o grupo de simetria de uma solução, a topologia de níveis de energia, e sincronia de nós específicos de uma rede, respectivamente.

Um *sistema de células acopladas* é um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) cuja estrutura apresenta-se como um número finito de subsistemas (*células*) que são acoplados. Ou seja, a dinâmica de uma determinada célula depende dos estados de algumas das outras células, bem como de seu próprio estado. Quais células estão acopladas podem ser especificadas por uma rede exibida como um grafo direcionado (digrafo) \mathcal{G} , cujos nós são as células e cujas arestas (direcionadas) correspondem aos acoplamentos. Ou seja, a célula i influencia a célula j se houver uma aresta direcionada do nó i para o nó j .

De modo abstrato, a topologia da rede (especialmente quando equipada com “rótulos”, especificando quando células ou acoplamentos são “iguais”) determina uma classe $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P$ de campos vetoriais *admissíveis* [86]. As EDOs correspondentes são precisamente os sistemas de células acopladas cuja “arquitetura” coincide com a de \mathcal{G} . Acontece que muitos aspectos da formação

de padrões em sistemas de células acopladas são principalmente consequências da topologia da rede e que a escolha precisa de um campo vetorial admissível é de relevância secundária.

Nesse nível de generalidade, qualquer sistema dinâmico pode ser pensado como um sistema de células acopladas e, inversamente. No entanto, há uma diferença significativa no ponto de vista. Um sistema de células acopladas é equipado com um conjunto distinto de *observáveis* [47, Seção 3.7], dadas pelos estados das células. Especificamente, assuma $\mathcal{C} = \{1, \dots, n\}$ e que as células sejam indexadas por $c \in \mathcal{C}$. Equipe cada célula c com um espaço de fase P_c (uma variedade suave de dimensão finita, que por simplicidade consideraremos como $\mathbb{R}^{k(c)}$ onde $k(c)$ é o número de “graus de liberdade” da célula c). Então, o *espaço de fase total* para o sistema é

$$P = P_1 \times \dots \times P_n$$

e o estado do sistema no momento t é $(x_1(t), \dots, x_n(t))$, onde $x_c(t)$ é o estado da célula c no tempo t . Observáveis distintas são então projeções $\pi_c : P \rightarrow P_c$ do espaço de fase total para os espaços de fase das células. Essas projeções são uma parte importante da estrutura no sentido de que, por exemplo, as únicas mudanças (permutações) de variáveis permitidas são as que preservam essas projeções [46, 47].

A existência de observáveis distintas torna significativo comparar a dinâmica de células distintas. Por exemplo, podemos dizer que as células i, j são **síncronas** se $x_i(t) = x_j(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou que elas são “relacionadas por fase” com *diferença de fase* θ se ambas forem periódicas e $x_j(t) = x_i(t + \theta)$. Atualmente, existe uma enorme literatura sobre sincronia, relações de fase e fenômenos dinâmicos mais exóticos em sistemas de células acopladas, geralmente denominados simplesmente “redes”: ver, por exemplo, Kuramoto [61], Pecora e Carroll [70], Boccaletti *et al.* [11], Wang [92] e Watts e Strogatz [93]. A potencial gama de aplicações desses sistemas também é enorme, incluindo comunicação via Internet, disseminação de epidemias, cadeias alimentares em ecossistemas, redes metabólicas, circuitos neurais, sequências de expressão gênica, cadeias de suprimentos comerciais, redes de energia elétrica, redes de transporte, fluxo de multidões, dentre outros.

Uma vertente da literatura concentra-se no efeito da simetria geral da rede na formação de padrões espaciais e espaço-temporais (Golubitsky e Stewart [46, 47], Dionne *et al.* [32]). As aplicações incluem locomoção animal (Buono e Golubitsky [20], Collins e Stewart [24–26], Golubitsky *et al.* [51]) e teoria da evolução (Antoneli [6], Cohen e Stewart [83], Elmhirst [34], Dias e Stewart [29], Stewart [78, 79], Stewart *et al.* [86], Vincent e Vincent [90]). Um análogo foi aplicado à percepção visual (Bressloff *et al.* [13–15]) que foi recentemente retomado para ilusões ópticas (Golubitsky *et al.* [53], Stewart e Golubitsky [85]).

No estudo da dinâmica de redes, existe uma classe importante de redes, a saber, redes que possuem um grupo de simetrias. Nesse contexto, existe um grupo de permutações de células (e setas) que preserva a estrutura da rede (incluindo tipos de células e tipos de setas), e sua ação em P é dada pela permutação de coordenadas celulares. Além disso, as EDOs associadas têm a forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

em que o campo vetorial f é suave (C^∞) e satisfaz

$$f(\gamma x) = \gamma f(x) \quad \forall x \in P, \gamma \in \Gamma.$$

Ou seja, f é *equivariante* sob a ação do grupo Γ no espaço de fase P . A teoria dos sistemas dinâmicos equivariantes (ver Golubitsky e colaboradores [47, 51]) pode ser aplicada a esses sistemas dinâmicos. Nesta teoria, um papel central é desempenhado pelos *subespaços de ponto fixo* dos subgrupos $\Sigma \subseteq \Gamma$, definidos por

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in P \mid \sigma x = x \ \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Subespaços de ponto fixo têm a propriedade importante de invariância por fluxo: eles são invariantes sob todo campo vetorial equivariante suave f , de modo que

$$f(\text{Fix}(\Sigma)) \subseteq \text{Fix}(\Sigma).$$

Veja [47, Teorema 1.17] ou [51, Lema XIII 2.1] para a prova simples e as implicações para quebra de simetria. Nesse contexto, existem dois principais teoremas de bifurcação local. O Lema de Ramificação Equivariante (ver Golubitsky, Stewart e Schaeffer [51, Teorema XIII 3.3]) prova a existência de certos ramos de estados estacionários que quebram simetrias; o Teorema de Hopf Equivariante [51, Teorema XVI 4.1] prova a existência de certos ramos de estados periódicos de tempo que quebram a simetria espaço-temporal. No entanto, a existência de simetrias de rede em caráter global é uma restrição muito forte, e acontece que, para muitos propósitos, é preferível uma noção mais fraca, desempenhada pelo **grupoide de simetria** da rede (Stewart *et al.* [86]; Golubitsky *et al.* [48, 52]).

Um grupoide é uma generalização de um grupo, no qual produtos de elementos nem sempre são definidos (Brown [17], Higgins [57]). O grupoide de simetria é uma formalização das “simetrias locais” de uma rede de células acopladas que relacionam subconjuntos da rede entre si. Em particular, os campos vetoriais “admissíveis” – aqueles especificados pela topologia de rede – são precisamente aqueles que são equivalentes pela ação do grupoide de simetria (Stewart *et al.* [86]).

Estrutura da Dissertação

Neste trabalho, abordamos os diversos conceitos relacionados ao formalismo de redes de sistemas dinâmicos acoplados do ponto de vista estabelecido a partir do grupoide de simetria. Vamos detalhar a teoria da bifurcação de “quebra de sincronia” de sistemas acoplados associados a redes ditas regulares não necessariamente simétricas e, em particular, estabelecer condições para análogos do Lema de Ramificação Equivariante (Golubitsky, Stewart e Schaeffer [51, Teorema XIII 3.3] e do Teorema de Hopf Equivariante [51, Teorema XVI 4.1]. O Capítulo 1 analisa os conceitos pertinentes dos sistemas dinâmicos acoplados e suas redes associadas. Em particular, damos uma definição formal de uma rede de células acopladas, explicamos sua representação gráfica, discutimos campos vetoriais admissíveis e demarcamos o importante conceito de uma relação de equivalência *balanceada*. O Capítulo 2 define redes regulares e estabelece algumas das propriedades de teoria de bifurcação local para descrever um análogo do Lema de Ramificação Equivariante (Teorema 2.25) para redes regulares e suas linearizações. O Capítulo 3 introduz as classes de sistemas dinâmicos do tipo grandiente e hamiltoniano com uma caracterização de sua estrutura no contexto de redes regulares para declarar e provar a versão hamiltoniana do Lema de Ramificação Equivariante (Teorema 3.32), do Teorema de Hopf Equivariante (Teorema de Hopf Hamiltoniano 3.32) e o Teorema do Centro de Lyapunov (Teorema 3.37) para redes acopladas, enquanto o Capítulo 4 é dedicado a uma visão de potenciais aplicações dos conceitos descritos.

1.1 Diagramas de Rede

1.1.1 Motivação

Começamos com o sistema mais simples de duas células idênticas (com coordenadas x_1 e x_2 em \mathbb{R}^k). Sem fazer nenhuma suposição específica da forma da “dinâmica interna” de cada célula ou da forma do “acoplamento entre células”, as equações diferenciais para o sistema acoplado têm a forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f(x_2, x_1);\end{aligned}\tag{1.1}$$

isto é, a mesma função f governa a dinâmica de ambas as células. Existem três questões que discutimos sobre o sistema (1.1): o grafo (diagrama de rede) associado a um sistema de células acopladas, simetria e sincronia.

Informalmente, a *rede* de um sistema de células acopladas é um grafo direcionado finito cujos nós representam células e cujas setas representam acoplamentos. Os nós são rotulados com o mesmo símbolo para indicar células **equivalentes**, que possuem o mesmo espaço de fase e a mesma dinâmica interna. As setas são rotuladas com o mesmo formato para indicar acoplamentos **equivalentes**. O grafo associado ao sistema (1.1) é apresentado na Figura 1.1. Pensamos neste grafo como representando um par de sistemas de equações diferenciais como descrito a seguir. As duas células são indicadas por símbolos idênticos, portanto, elas têm as mesmas variáveis de estado. Ou seja, as coordenadas x_1 da célula 1 e x_2 da célula 2 estão no mesmo espaço de fase \mathbb{R}^k . Como podemos trocar as células 1 e 2 sem alterar o grafo, assumimos que o mesmo vale para o sistema de equações diferenciais e que elas devem ter a forma (1.1). Observe que, para que esse intercâmbio funcione, a seta $1 \rightarrow 2$ deve ser a mesma que a seta $2 \rightarrow 1$ para expressar o comportamento da troca de variáveis.

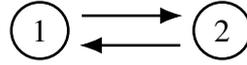


Figura 1.1: Uma rede de 2 células com acoplamento simétrico.

A discussão na seção anterior pode ser resumida pelo seguinte: a permutação $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ é uma simetria do sistema (1.1). De fato, temos mais do que isso: todo sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ que é **equivariante** em relação a σ tem a forma (1.1). Ou seja, abstratamente o estudo de pares de células idênticas que são acopladas de forma idêntica é o mesmo que o estudo de sistemas σ -equivariantes. Duas consequências decorrem dessa observação. Primeiro, a sincronia nos sistemas de duas células (soluções como $x_1(t) = x_2(t)$ para todo tempo t) é um fenômeno robusto e não deve ser visto como surpreendente. Segundo, as soluções periódicas de tempo podem exibir um tipo de sincronia generalizada na qual as duas células oscilam com diferença de meio período de fase.

A primeira observação pode ser reafirmada da seguinte forma: o subespaço diagonal $V = \{x_1 = x_2\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ é fluxo-invariante para todos os sistemas (1.1). Esta observação pode ser verificada de duas maneiras. Por inspeção direta, restringindo (1.1) a V , obtendo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1, x_1), \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_1).\end{aligned}$$

Daí resulta que, se as condições iniciais de uma solução satisfizerem $x_1(0) = x_2(0)$, então $x_1(t) = x_2(t)$ para todo tempo t , e V é fluxo-invariante. Como alternativa, podemos observar que V é o subespaço de ponto fixo $\text{Fix}(\sigma)$, e os subespaços de ponto fixo são bem conhecidos por serem fluxo-invariantes (consulte [47, Teorema 1.17] ou [51, Lema XIII 2.1] para mais detalhes).

A segunda observação é relacionada a teoremas gerais sobre simetrias espaço-temporais de soluções periódicas em sistemas simétricos de EDOs. Existem dois tipos de teoremas neste contexto: teoremas da existência, afirmando que certas simetrias espaço-temporais são possíveis, e teoremas de bifurcação, descrevendo cenários particulares que podem gerar tais soluções. O Teorema *H/K* [20, 47] é um teorema de existência: ele estabelece condições necessárias e suficientes para que soluções periódicas com um determinado grupo de simetria espaço-temporal sejam possíveis. Em particular, ele implica a existência de funções f com soluções periódicas de período T satisfazendo

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t + T/2) \quad (1.2)$$

desde que o espaço de fase de cada célula tenha dimensão $k \geq 2$. Portanto, estados com esse tipo de padrão espaço-temporal podem existir. De fato, eles podem existir de maneira robusta (ou seja, podem persistir quando f é perturbada) e, portanto, são típicos nos sistemas de células acopladas apropriados. Nesse caso, podemos dizer mais: essas soluções podem surgir através da bifurcação de Hopf. Isso é uma consequência da teoria geral de bifurcação de Hopf simétrica, em especial do *Teorema de Hopf Equivariante* (Golubitsky e Schaeffer [43]; Golubitsky e Stewart [46]; Golubitsky *et al.* [51]) que fornece condições sob as quais estados relacionados à fase desse tipo ocorrem. (Observe que quando $k = 1$, soluções periódicas não-constantes que satisfazem (1.2) devem cruzar a diagonal V e, portanto, estar em V o tempo todo, o que é uma contradição.)

Exemplo 1.1. O modelo β IG para diabetes, Topp *et al.* [87] tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{G} &= a - (b + cI)G \\ \dot{I} &= \beta \left(\frac{dG^2}{e + G^2} \right) - fI \\ \dot{\beta} &= (-g + hG - iG^2)/\beta \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde os termos G = nível de glicose, I = nível de insulina, e β = massa de β -células dependem do tempo t . Os outros termos $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ são parâmetros reais cujo valor é constante durante qualquer compilação particular do modelo ou outro sistema.

Uma rede surge quando consideramos quais variáveis dependem das demais. Temos que:

- a variação em G depende de G e I mas não de β .
- a variação em I depende de G, I e β .
- a variação em β depende de G e β mas não de I .

Torna-se natural registrar essas relações de dependência como a rede (chamada de diagrama de bloco em algumas áreas de aplicação) mostrada na Figura 1.2. Nesta, cada variável é represen-

tada por um símbolo de célula (círculo, quadrado, hexágono) e setas mostram quais variáveis afetam qual variável de estado da célula dada. Os diferentes símbolos de célula indicam diferentes “tipos de célula”, significando que o formato da equação é diferente nestas células, assim como o espaço de fase. Os diferentes símbolos de setas (sólida, pontilhada, etc.) indicam diferentes “tipos de seta”, significando que o formato de acoplamento é diferente para estas células.

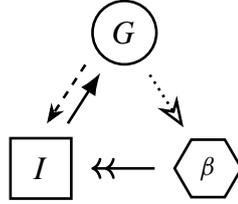


Figura 1.2: Representação da rede do modelo βIG .

Em tal representação, símbolos individuais de células ou setas não tem significado extra por si só. Sua interpretação depende do diagrama inteiro. Por exemplo, em (1.3) o acoplamento de G e β para I não é uma soma de termos em G e β separadamente, mas uma combinação de ambos. Acoplamentos não precisam ser aditivos: na equação de G a variável I aparece como um produto cIG , por exemplo.

Exemplo 1.2. Considere uma EDO representando 3 neurônios acoplados de FitzHugh-Nagumo (FitzHugh [38], Nagumo *et al.* [68]) :

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= v_1(a - v_1)(v_1 - 1) - w_1 - cv_2 & \dot{w}_1 &= bv_1 - \gamma w_1 \\
 \dot{v}_2 &= v_2(a - v_2)(v_2 - 1) - w_2 - cv_3 & \dot{w}_2 &= bv_2 - \gamma w_2 \\
 \dot{v}_3 &= v_3(a - v_3)(v_3 - 1) - w_3 - cv_1 & \dot{w}_3 &= bv_3 - \gamma w_3
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde v_i é o potencial de membrana da célula i , w_i é um substituto para uma corrente iônica e a , b , γ são parâmetros reais constantes com $0 < a < 1$, $b < 0$, $\gamma > 0$ e c é a força do acoplamento.

Em (1.4) as equações são as mesmas para cada neurônio a menos de apropriadas permutações de variáveis. Em outras palavras, os neurônios individuais são idênticos assim como os acoplamentos. Disso, o digrama natural neste caso é um anel de três células idênticas (mesmo tipo de célula) com idêntico acoplamento unidirecional (mesmo tipo de seta) como na Figura 1.3.

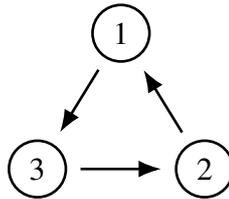


Figura 1.3: Representação da rede de um anel de três idênticos neurônios de FitzHugh-Nagumo com acoplamento unidirecional idêntico.

O espaço de estado da célula i é agora 2-dimensional com variáveis (v_i, w_i) . Como as variáveis entram nas equações do mesmo modo para cada i sujeitas à permutação cíclica, as células têm o *mesmo tipo* assim como as setas, o que se traduz no diagrama pelo uso de círculos e setas iguais. O grupo de simetria é \mathbb{Z}_3 gerado pelo 3-ciclo (123) atuando nos pares (v_i, w_i) .

Ressaltamos que, quando $a = b = \gamma = 0.5$ e $c = 2$, o sistema (1.4) exibe um estado periódico estável em que as células sucessivas têm um terço de um período fora de fase. A Figura 1.4 abaixo ilustra o padrão para v_i mas o mesmo padrão ocorre para w_i . Este estado é uma *onda rotativa discreta* que exibe simetria espaço-temporal induzida pela ação de \mathbb{Z}_3 :

$$x_2(t) = x_1(t - T/3) \quad x_3(t) = x_1(t - 2T/3)$$

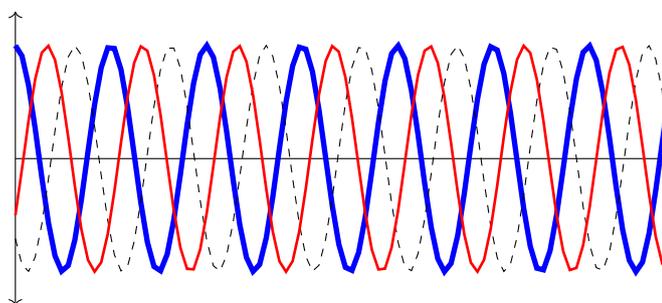


Figura 1.4: Oscilações periódicas do anel de 3 células exibindo um período 1/3 fora de fase. Séries temporais de v_1 (grossa), v_2 (fina) e v_3 (tracejada). Reproduzido de [47].

Com as devidas adequações, muitos resultados de dinâmica equivariante se aplicam a redes simétricas. Contudo, poucos modelos em ciências aplicadas exibem simetrias globais. Porém, há redes que, apesar de não ter simetria no sentido global, podem exibir padrões de sincronia.

Em 2002, Marcus Pivato descreveu uma rede de 16 células que tinha um estado periódico em que os nós foram particionados em 4 subconjuntos de 4 nós. As células em cada partição eram síncronas enquanto células em partições distintas apresentavam a mesma dinâmica a menos de um deslocamento de fase múltiplo de 1/4 do período. Tratava-se de uma onda rotativa induzida por \mathbb{Z}_4 , exceto pelo fato da rede *não possuir* simetria \mathbb{Z}_4 . Com isso em mente, Marty Golubitsky, Ian Stewart e demais colaboradores propuseram uma teoria para estudar esse tipo de rede partindo da noção de simetria local, estabelecendo o *formalismo via grupoides* [48, 52].

1.1.2 Modelagem

Um diagrama de rede não especifica uma EDO como tal. Em particular, ele não nos diz nada sobre a equação em si. Ao invés, o diagrama age como uma representação esquemática de

quais variáveis afetam as demais, especificando quando a mesma equação se aplica a variáveis correspondentes. Deste modo, cada diagrama determina uma *classe* de EDOs que “respeita a estrutura da rede”. Além do mais, certas propriedades dinâmicas podem ser comuns para todas as EDOs nessa classe, e daí, surgem certas propriedades para esta rede. Incluem-se aí possíveis padrões de sincronia, relações de fase em estados periódicos e uma interpretação teórica de homeostase (Golubitsky e Stewart [49]) que foi aplicada a regulação genética eucariota por Antoneli *et al.* [8]. Outras propriedades dependem das equações, de modo que a teoria formal separa propriedades que são típicas para todas as redes de um dado diagrama das propriedades que são especiais e dependem dos termos precisos na equação.

Numa abordagem convencional de modelagem, as equações são escolhidas a princípio usando termos específicos que refletem (ou presumem) aspectos da Biologia ou Física do sistema sendo modelado. Por exemplo, o termo $dG^2/(e + G^2)$ no modelo β IG em (1.3) tende a uma constante d para G suficientemente grande, modelando uma propriedade de resposta da insulina para grandes níveis de glicose. Outras EDOs consistentes com a arquitetura da rede não precisam se comportar deste modo, mas provavelmente, não seriam apropriadas para modelar diabetes. Tendo estabelecido equações específicas que incorporam várias suposições desse tipo, elas podem ser estudadas analiticamente ou numericamente para ver como as soluções se comportam. Em circunstâncias em que há forte justificativa para a escolha de uma fórmula específica, esse tipo de modelo é uma representação precisa do sistema real.

Entretanto, especialmente na Biologia, muitas vezes há muita flexibilidade na escolha da fórmula e a literatura tipicamente considera muitas variantes. É aqui que a filosofia “independente de modelo” apresentada aqui difere dessa convencional abordagem “dependente de modelo”. Ela oferece algumas vantagens ao distinguir entre os aspectos da solução que são sensíveis à fórmula exata empregada e aqueles que são relativamente robustos e dependem principalmente da arquitetura da rede. Modelos específicos ainda são importantes; por exemplo, para descobrir quais valores de parâmetro levam a tipos específicos de comportamento. Mas eles podem ser usados no contexto do conhecimento de que tipo de comportamento deve ser esperado com base na estrutura da rede. Isso evita o perigo de atribuir comportamento previsto a uma fórmula específica quando é na verdade um resultado da estrutura da rede e que ocorreria para outras fórmulas.

Este ponto de vista muda a ênfase para uma abordagem de dois estágios. Primeiro, entender propriedades independentes do modelo. Segundo, considerar as propriedades dependentes do modelo no contexto das independentes para descobrir que informação extra a escolha específica do modelo adiciona. O primeiro passo motiva a definição de uma configuração formal para

dinâmica de redes e a elaboração dos princípios gerais que se aplicam. O objetivo inicial é usar a estrutura de rede para definir uma *classe* natural de equações diferenciais cuja estrutura seja compatível com uma dada rede. Dizemos que tais EDOs são “admissíveis”.

Há várias formulações gerais na literatura. Por exemplo, Kuramoto [61] considera dinâmica interna não-linear acrescida de acoplamentos lineares:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i) + \sum_j a_{ij} x_j \quad (1.5)$$

com f_i não-linear e constantes a_{ij} complexas para algum conjunto de nós de entrada j . A ideia é que cada célula tenha dinâmica interna não-linear f_i e acoplamentos lineares dados pela matriz (a_{ij}) . A expressão (1.5) pode ser motivada como uma pragmática aproximação de baixa ordem para equações mais complicadas, onde a linearidade corresponde a um acoplamento fraco (para remover acoplamentos basta assumir um termo a_{ij} relevante como sendo zero).

Outra escolha comum é assumir que os nós representam “osciladores de fase” cujo espaço de estado é um círculo \mathbb{S}^1 e um estado $\theta \in \mathbb{S}^1$ descreve a fase do oscilador. Neste modelo as amplitudes das oscilações são ignoradas.

Muitas vezes, os sistemas de células acopladas são usados como modelos em um sentido esquemático: a forma exata que as equações do modelo podem ter é desconhecida. Tudo o que se sabe é quais células têm influências iguais em outras células. Os exemplos de 2 células e de Fitzhugh-Nagumo mostram isso. Nesses casos, é a simetria do sistema acoplado que é a suposição importante de modelagem, não as equações detalhadas para as células. Qual formalismo é apropriado depende das perguntas feitas.

Por exemplo, no modelo de neurônios de Fitzhugh-Nagumo (1.4), as células podem representar neurônios individuais ou, como é mais provável, coleções de neurônios? A dinâmica interna de cada célula deve ser modelada por um único sistema ou, mais realisticamente, por uma coleção de sistemas? Em muitos casos, essas questões são secundárias porque não há razões físicas ou biológicas bem estabelecidas para fazer qualquer escolha específica.

1.2 Sistemas e Redes de Células Acopladas

Começaremos agora a criar uma estrutura formal para a dinâmica de redes. Por razões vagamente relacionadas ao uso de modelos biológicos e para distinguir o tópico da teoria de grafos padrão, os termos “vértice” e “aresta direcionada” foram substituídos por “célula” (ou “nó”) e “seta” nos primeiros trabalhos. Por coerência com a literatura, faremos o mesmo aqui.

Definição 1.3. Uma *rede de células acopladas* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ constitui-se de:

- (a) Um conjunto finito $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, n\}$ de células.
- (b) Um conjunto finito \mathcal{S} de setas.
- (c) Dois mapas $\mathcal{H} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ e $\mathcal{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ tais que cada seta $s \in \mathcal{S}$ tem uma *cabeça* $\mathcal{H}(s) \in \mathcal{C}$ e uma *cauda* $\mathcal{T}(s) \in \mathcal{C}$.
- (d) Uma relação de equivalência $\sim_{\mathcal{C}}$ sobre as células em \mathcal{C} que as classifica em tipos de acordo com seu *espaço de fase*.
- (e) Uma relação de equivalência $\sim_{\mathcal{S}}$ sobre as setas em \mathcal{S} que as classifica em tipos de acordo com seus *conjuntos de entrada*.
- (f) Duas condições de compatibilidade: Se $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ são $\sim_{\mathcal{S}}$ -equivalentes, então $\mathcal{H}(s_1)$ e $\mathcal{H}(s_2)$ são $\sim_{\mathcal{C}}$ -equivalentes, e do mesmo modo, $\mathcal{T}(s_1)$ e $\mathcal{T}(s_2)$.

De agora em diante, muitas vezes abreviaremos “rede de células acopladas” para “rede”. Uma rede pode ser representada graficamente por seu diagrama. As setas são decoradas de maneira semelhante para distinguir tipos usando linhas pontilhadas ou onduladas, diferentes pontas e assim por diante. Cada seta s sai de $\mathcal{T}(s)$ para $\mathcal{H}(s)$. O diagrama é um digrafo rotulado de modo que os rótulos são representações gráficas de células específicas.

Observação 1.4. Uma seta pode ter a mesma cabeça e cauda, formando uma *auto-conexão* de uma célula para si mesma representada por um laço. Duas setas distintas (do mesmo tipo ou de tipos diferentes) podem ter a mesma cabeça e a mesma cauda, produzindo *múltiplas conexões* entre as duas células. Esta formulação tem várias vantagens técnicas sobre a versão mais restrita descrita em [86]. Por exemplo, redes quocientes (que são relevantes à noção de sincronia) naturalmente levam a múltiplas flechas, e as condições de contorno de Neumann (no sentido de Epstein e Golubitsky [36]) naturalmente levam a auto-acoplamentos [52, Seção 1]. Mais significativamente, os campos vetoriais admissíveis sempre se “levantam” das redes quocientes [52, Teorema 5.2]. Este não é o caso no formalismo de [86], onde as condições necessárias e suficientes para levantamento foram derivadas por Dias e Stewart [30].

Em retrospectiva, o formalismo de [86] pode ser visto como um caso especial do formalismo de múltiplas setas, no qual exigimos que todas as setas sejam únicas e não permitam auto-acoplamentos. Os principais resultados deste capítulo são válidos em qualquer formalismo, com provas muito semelhantes. Por definição, trabalhamos no formalismo de múltiplas setas, devido às vantagens técnicas acima mencionadas, ao preço de pequenas complicações nas definições.

A Figura 1.5 mostra alguns exemplos e aproveitamos para ilustrar alguns tipos básicos de arquitetura de rede (isto é, topologia de rede) ao mesmo tempo. O exemplo “genérico” ao final ilustra algumas possibilidades consistentes com o formalismo e não tem relevância especial.

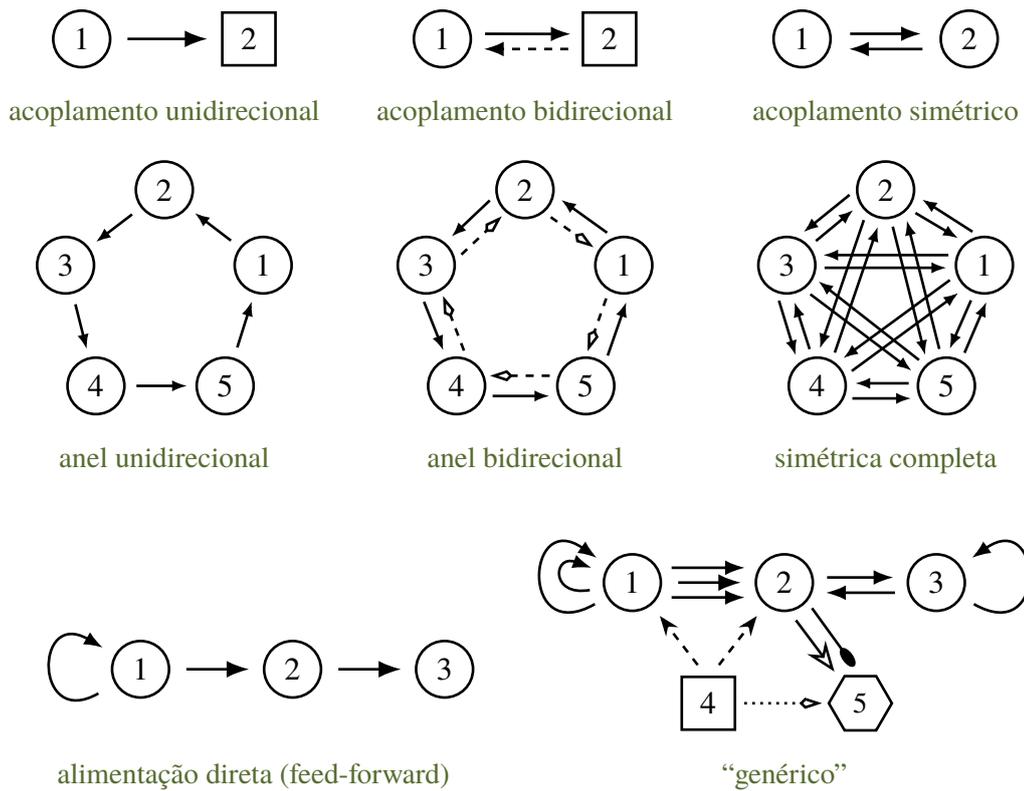


Figura 1.5: Exemplos de redes de células acopladas.

Uma rede é *conexa* (ou chamada de fracamente conectada) se o grafo subjacente é conexo. Um digrafo é *conexo por caminhos* (ou fortemente conectada) se ele contém um caminho orientado para cada par de células em ambos sentidos. Caso contrário, uma rede é *desconexa* quando divide-se em componentes conexas disjuntas. Um exemplo de rede conexa que é desconexa por caminhos pode ser observado na rede de alimentação direta acima, pois não há uma seta com cauda na célula 3 e assim não há caminho que a conecta a outras células nesse sentido.

1.3 Grupoide de Simetria de uma Rede

Dada uma rede $\mathcal{G} = (\mathcal{C}, \mathcal{S}, \sim_C, \sim_S)$ como na Definição 1.3, podemos definir o *grupoide de simetria* $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ de \mathcal{G} . Esta definição se concentra na noção de *conjunto de entrada*, o qual é útil quando certas sub-redes em questão codificam as entradas das células, pois indica quando as células em questão “têm os mesmos tipos de acoplamentos” como um tipo de simetria parcial.

Definição 1.5. Seja $c \in \mathcal{C}$. O *conjunto de entrada* de c é o conjunto $I(c)$ de todas as setas $s \in \mathcal{S}$ tais que $\mathcal{H}(s) = c$. Ou seja, $I(c) = \{s \in \mathcal{S} \mid \mathcal{H}(s) = c\}$.

Um elemento de $I(c)$ é chamado de *seta de entrada* em c .

Definição 1.6. Um *isomorfismo de entradas* $\beta : I(c) \rightarrow I(d)$ é uma bijeção entre conjuntos de entrada que preserva o tipo de seta, ou seja, $s \sim_S \beta(s)$ para todo β e toda seta $s \in I(c)$. (Note que $\beta^{-1}(s')$ é \sim_S -equivalente a s' para todo $s' \in I(d)$)

Se existe um isomorfismo de entradas $\beta : I(c) \rightarrow I(d)$ dizemos que c e d são *isomórficas por entradas* ou *equivalentes por entradas*.

Definição 1.7. A relação de equivalência por entradas \sim_E em \mathcal{C} é definida por $c \sim_E d$ se, e somente se, existe uma bijeção

$$\beta : I(c) \rightarrow I(d)$$

tal que, para cada $i \in I(c)$,

$$i \sim_S \beta(i)$$

O conjunto de entradas é importante porque codifica quais células estão conectadas a quais e por qual tipo de seta. Células equivalentes por entradas recebem os mesmos acoplamentos das células relevantes da rede.

Exemplo 1.8. Seja \mathcal{G} a rede da Figura 1.6 abaixo.

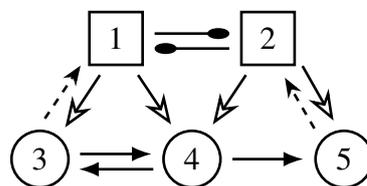


Figura 1.6: Uma rede de 5 células.

Os conjuntos de entradas das cinco células são mostrados na Figura 1.7.

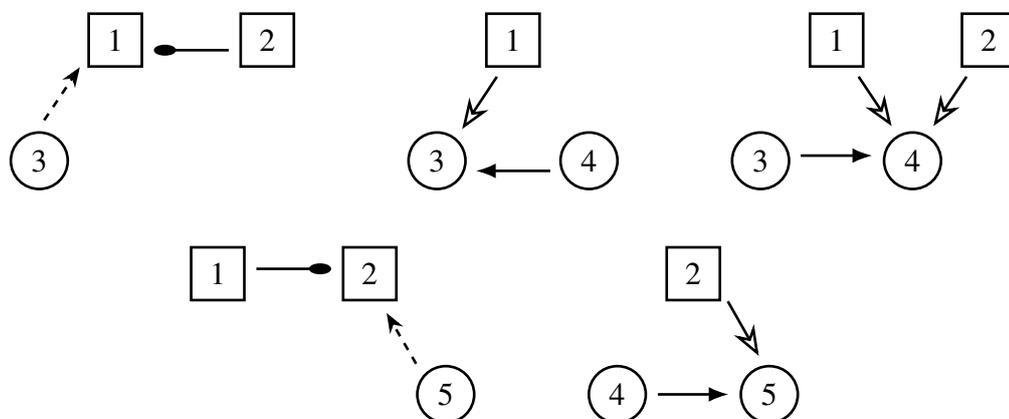


Figura 1.7: Conjuntos de entradas da rede de 5 células. Da esquerda para a direita: $I(1)$, $I(3)$, $I(4)$, $I(2)$, $I(5)$. Estritamente, as setas constituem o conjunto de entradas mas é conveniente também mostrar as células da cabeça e cauda delas.

Vemos que as células 1 e 2 são isomórficas por entradas, assim como as células 3 e 5. Porém, as células 1 e 3 não são isomórficas por entradas. Apesar de ambas receberem duas entradas, os tipos de seta são diferentes.

O conjunto de todos os isomorfismos de entradas da célula c para a célula d é denotado por $B(c, d)$. Definimos então

$$\mathcal{B}_{\mathcal{G}} = \bigcup_{c, d \in \mathcal{C}} B(c, d)$$

Uma operação de produto natural pode ser definida em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ da seguinte maneira: os elementos $\beta_2 \in B(c, d)$ e $\beta_1 \in B(a, b)$ podem ser multiplicados apenas quando $b = c$ e, neste caso, $\beta_2\beta_1 \in B(a, d)$ é a composição usual de funções. Agora $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ é um grupoide cujos objetos são os nós de \mathcal{G} , e os $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ -morfismos são os elementos dos conjuntos $B(c, d)$, com a operação do produto entre os morfismos como definido acima. A estrutura algébrica de um grupoide foi introduzida por Brandt [12] e trabalhada em detalhes por Higgins [57] e Brown [17]. Seguindo [52, 86] chamamos $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ de *grupoide de simetria* da rede \mathcal{G} . Para qualquer $c \in \mathcal{C}$, o subconjunto $B(c, c)$ é um grupo conhecido por *grupo de vértice* correspondente a c .

A estrutura de grupoide pode ser vista como um efeito colateral do formalismo ao invés de um ingrediente vital. Grupoide carregam localmente a estrutura de um grupo combinada com a noção de componentes conexas de um grafo. Seu uso se justifica pelo fato de não estarmos lidando com meras bijeções em conjuntos mas com bijeções que preservam tipos de células e conjuntos de entradas, ainda que apenas em caráter de composição local.

Definição 1.9. Um subconjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ é um *subgrupoide* se é fechado por $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ -composições.

Definição 1.10. Seja $[E]$ uma classe de \sim_E -equivalência. O subgrupoide

$$\mathcal{Q}([E]) = \bigcup_{c, d \in [E]} B(c, d)$$

é uma *componente conexa* de $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$.

1.3.1 Estrutura de $B(c, d)$

Seja $B(c, d) \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$. Podemos especificar a estrutura do conjunto $B(c, d)$ em termos da estrutura de \mathcal{G} . Distinguimos três casos:

1. Se $c \not\sim_E d$ então $B(c, d) = \emptyset$.

2. Se $c = d$, podemos definir uma relação de equivalência \equiv_c em $\mathcal{T}(I(c))$ por

$$\mathcal{T}(j_1) \equiv_c \mathcal{T}(j_2) \iff j_1 \sim_S j_2 \quad (1.6)$$

onde $j_1, j_2 \in I(c)$. Se $K_1, K_2, \dots, K_{r(c)}$ são as classes de \equiv_c -equivalência (em $\mathcal{T}(I(c))$), então

$$B(c, c) = \mathbf{S}_{K_1} \times \dots \times \mathbf{S}_{K_{r(c)}} \quad (1.7)$$

onde cada \mathbf{S}_{K_i} compreende todas as permutações do conjunto K_i . Se estendermos pela identidade em $\mathcal{T}(I(c))/K_i$, existe um mergulho natural de $\mathbf{S}_{K_1} \times \dots \times \mathbf{S}_{K_{r(c)}}$, e assim, de $B(c, c)$ no grupo $\mathbf{S}_{n(c)}$, em que $n(c) = |\mathcal{T}(I(c))|$.

3. Se $c \neq d$ e $c \sim_E d$ (de modo que $B(c, d) \neq \emptyset$), então para qualquer $\beta \in B(c, d)$ temos

$$B(c, d) = \beta B(c, c) = B(d, d) \beta$$

Para provas dos fatos acima, consulte [86], final da Seção 3.

1.4 Campos Vetoriais Admissíveis

Agora tornaremos precisa a conexão entre sistemas de células acopladas e redes de células acopladas. Essencialmente, a rede é um diagrama esquemático (grafo), enquanto o sistema é um conjunto de EDOs cujos acoplamentos correspondem às setas da rede. Para obter essas EDOs, devemos associar as variáveis x_c às células c , ou seja, devemos escolher um espaço de fase para cada célula.

1.4.1 Espaços de Fase

Por um sistema de células acopladas, queremos dizer uma rede de sistemas dinâmicos acoplados, onde usamos um digrafo rotulado \mathcal{G} (ou seja, uma rede de células acopladas no sentido da Definição 1.3), cujos nós correspondem às células e cujas setas representam acoplamentos. O termo “acoplamento” aqui é usado no sentido de que a saída de certas células afeta a evolução no tempo de outras células.

Novamente, seguimos o tratamento de Stewart *et al.* [86] e Golubitsky *et al.* [52]. Considere uma rede de células acopladas $\mathcal{G} = (\mathcal{C}, \mathcal{S}, \sim_C, \sim_S)$, com grupoide de simetria $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$. Desejamos definir uma classe $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P$ de campos vetoriais *admissíveis* correspondentes a \mathcal{G} . Esta classe consiste em todos os campos vetoriais que são *compatíveis* com a estrutura do digrafo rotulado e depende de uma escolha de um *espaço de fase total* P .

Para cada célula $c \in \mathcal{C}$, associamos um espaço de fase P_c , que por simplicidade assumimos ser um espaço vetorial real de dimensão finita não-nula. Em geral, tal espaço deve ser uma variedade diferencial. Porém, a fim de evitar excessos do formalismo de variedades (como fibrados tangentes), assumimos que $P_c = \mathbb{R}^{k_c}$ é um espaço vetorial real. Para teoria de bifurcação local isso é suficiente. Porém, para alguns propósitos outras escolhas são necessárias, como $P_c = \mathbb{S}^1$ para sistemas de osciladores de fase por exemplo.

O papel da relação de $\sim_{\mathcal{C}}$ -equivalência é identificar os espaços de fase de células equivalentes, ou seja: se $c \sim_{\mathcal{C}} d$ então temos $P_c = P_d$. O espaço de fase total da rede é dado por

$$P = \prod_{c \in \mathcal{C}} P_c.$$

1.4.2 Funções Admissíveis

Para cada rede \mathcal{G} e cada escolha específica de coordenadas de célula x_c que preserva o tipo de célula, associamos o espaço de todas as EDOs que são compatíveis com a arquitetura da rede. Tais EDOs são chamadas *sistemas de células acopladas*, o qual abreviaremos para “SCAs”. Para definir essas EDOs, associamos a \mathcal{G} um espaço de *campos vetoriais admissíveis*. Quando todos os P_i são espaços vetoriais reais, nos referimos a eles como espaços de *funções admissíveis* (do fato que o espaço tangente de \mathbb{R}^k em qualquer ponto é \mathbb{R}^k).

Exemplo 1.11. Considere novamente a rede do Exemplo 1.8. Nela temos dois tipos de célula e quatro tipos de seta. Escolhemos coordenadas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ para as células 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Pela equivalência de células, temos $P_1 = P_2$ e $P_3 = P_5$. Assim, um SCA toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= f(x_2, x_1, x_5) \\ \dot{x}_3 &= g(x_3, x_1, x_4) \\ \dot{x}_4 &= h(x_4, \overline{x_1}, \overline{x_2}, x_3) \\ \dot{x}_5 &= g(x_5, x_2, x_4) \end{aligned} \tag{1.8}$$

com funções suaves arbitrárias

$$\begin{aligned} f &: P_1 \times P_2 \times P_3 \rightarrow P_1 \\ g &: P_3 \times P_1 \times P_4 \rightarrow P_3 \\ h &: P_4 \times P_1 \times P_2 \times P_3 \rightarrow P_4 \end{aligned}$$

Primeiramente, explicaremos como essa forma foi obtida a partir da rede. Considere a primeira equação, a qual diz respeito a célula 1. A componente do campo vetorial é $f(x_1, x_2, x_3)$. A primeira entrada x_1 é a coordenada da célula e representa o seu estado interno. As outras duas entradas correspondem às coordenadas de entradas originadas pelas células nas caudas das duas setas que apontam para a célula 1, como mostrado na Figura 1.7. Da mesma forma, as equações para as células 2, 3, 4 e 5 abrangem a coordenada da célula e as coordenadas de entradas, com a coordenada da respectiva célula sendo distinguida das demais ao aparecer na primeira entrada da função componente. Fazemos isso pois a coordenada da célula não é representada por uma seta (seria possível adicionar uma auto-conexão explícita para representar essa variável, no entanto, essa seta teria de ser naturalmente distinguida de quaisquer outras possíveis auto-conexões).

Vemos na Figura 1.7 que células 1 e 2 são equivalentes por entradas: cada uma recebe uma seta tracejada e uma de ponta arredondada, o que produz o mesmo conjunto de entradas apesar das caudas serem distintas. Admissibilidade significa que a mesma função f se aplica às células 1 e 2. As variáveis são escritas em uma ordem que respeita essa equivalência: as variáveis correspondentes vêm de células na cauda de setas do mesmo tipo.

A equação da célula 3 tem uma função distinta g pois essa célula não tem entradas equivalentes com 1 e 2. Como a célula 5 tem entradas equivalentes a 3, usamos a mesma g com variáveis correspondendo através do isomorfismo de entradas. Na célula 4 temos uma nova propriedade: nela entram duas setas equivalentes (de 1 e 2). Assim, existe um isomorfismo de entradas de $I(4)$ em si próprio que permuta essas setas. A admissibilidade requer que h seja simétrica nessas coordenadas, ou seja, $h(x_4, x_1, x_2, x_3) \equiv h(x_4, x_2, x_1, x_3)$ como indicado pela barra sobre as variáveis.

Repetimos que o papel central de uma rede de células acopladas é codificar uma classe de EDOs cujos acoplamentos seguem a arquitetura da rede. Em seguida, buscamos propriedades que são “típicas” para todas as EDOs nesta classe, conforme explicado abaixo. O formalismo não pretende definir uma EDO específica. Em vez disso, determinada uma dessas classes, queremos distinguir propriedades que são típicas dessa classe daquelas que não são.

Descreveremos um procedimento para definir campos vetoriais admissíveis. Para cada $c \in \mathcal{C}$, escolha coordenadas x_c em P_c . Do espaço de fase P utilizamos o sistema de coordenadas $x = (x_c)_{c \in \mathcal{C}}$. Agora, suponha que $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_m)$ é qualquer subconjunto finito de m células em \mathcal{C} . Em particular, a mesma célula pode aparecer mais de uma vez em \mathcal{D} . Defina

$$P_{\mathcal{D}} = P_{d_1} \times \dots \times P_{d_m}$$

com

$$x_{\mathcal{D}} = (x_{d_1}, \dots, x_{d_m})$$

onde $x_{d_j} \in P_{d_j}$ com P_{d_j} sendo um espaço k_j -dimensional.

Com um campo vetorial em $P_{\mathcal{D}}$, devidamente adaptado às coordenadas, podemos então abranger as componentes f_c , $c \in \mathcal{C}$ de modo que

$$f_c : P_{\mathcal{D}} \rightarrow P_c.$$

Além disso, impomos condições extras em f_c para admissibilidade em refletir a arquitetura da rede do seguinte modo:

Definição 1.12. Seja \mathcal{G} uma rede. Um campo vetorial $f : P \rightarrow P$ é \mathcal{G} -admissível se satisfaz:

- (a) *Condição de domínio:* para cada célula c a componente f_c depende apenas da variável x_c e das variáveis de entrada $x_{\mathcal{T}(e)}$ com $e \in I(c)$. Ou seja, existe uma função (suave) $\hat{f}_c : P_c \times P_{\mathcal{T}(I(c))} \rightarrow P_c$ tal que

$$f_c(x) = \hat{f}_c(x_c, x_{\mathcal{T}(I(c))})$$

- (b) *Condição de simetria:* se c é uma célula, f_c é invariante por permutações de coordenadas originadas por setas equivalentes.
- (c) *Condição pullback:* se células $c \neq d$ são equivalentes por entradas, as componentes f_c e f_d são idênticas, sendo suas variáveis correspondentes a algum isomorfismo de entrada. Ou seja, para todo $c, d \in \mathcal{C}$ e $\beta \in B(c, d)$ temos

$$\hat{f}_d(x_d, x_{\mathcal{T}(I(d))}) = \hat{f}_c(x_d, \beta^*(x_{\mathcal{T}(I(d))}))$$

para todo $x \in P$.

Podemos explicitar a condição pullback considerando qualquer $\beta \in B(c, d)$ e então definimos a *função pullback*

$$\beta^* : P_{\mathcal{T}(I(d))} \rightarrow P_{\mathcal{T}(I(c))}$$

por

$$(\beta^*(z))_{\mathcal{T}(i)} = z_{\mathcal{T}(\beta(i))}$$

para todo $i \in I(c)$ e $z \in P_{\mathcal{T}(I(d))}$.

Usamos funções pullback para relacionar diferentes componentes do campo vetorial em questão. Note que o Exemplo 1.11 exhibe consequências de todas as três condições.

Teorema 1.13 ([30, Teorema 4.2]). *Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{C}, \mathcal{S}, \sim_{\mathcal{C}}, \sim_{\mathcal{S}})$ uma rede e $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ o grupoide de simetria associado. Um campo vetorial $f : P \rightarrow P$ de uma escolha de P_c é $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ -equivariante se, e somente se, para cada componente conexa \mathcal{Q} de $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ (cada classe de \sim_E -equivalência):*

- (a) \hat{f}_c é $B(c, c)$ -invariante para algum $c \in \mathcal{Q}$.
 (b) Para $d \in \mathcal{Q}$ tal que $d \neq c$, dado (qualquer) $\beta \in B(c, d)$, temos

$$f_d(x_d, x_{\mathcal{T}(I(d))}) = \hat{f}_c(x_d, \beta^*(x_{\mathcal{T}(I(d))}))$$

Demonstração. Esta é uma generalização de [86, Lema 4.5] e segue diretamente da Seção 1.3.1 e da condição pullback. \square

Temos um SCA associado a qualquer função admissível f como

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.9)$$

Se f também depende de um parâmetro λ e é admissível como função de x para qualquer λ fixo, temos uma família de funções admissíveis. Tais famílias surgem em teoria de bifurcação.

1.4.2.1 Funções Fortemente Admissíveis

Uma classe especial de funções admissíveis desempenha um papel fundamental na teoria, principalmente como uma ferramenta técnica em demonstrações. Em dinâmica equivariante temos um recurso muito útil: compor duas funções equivariantes produz uma função equivariante. No entanto, exemplos simples mostram que funções admissíveis geralmente não possuem essa propriedade. Isso pode ser consertado considerando uma classe de funções mais restritiva:

Definição 1.14. Uma função *fortemente admissível* é uma função g tal que:

- (a) g_c depende apenas de x_c para cada célula c .
 (b) Se $c \sim_C d$, então $g_c = g_d$.

Segue que $g(x) = (g_1(x_1), \dots, g_n(x_n))$, onde $g_c = g_d$ sempre que c e d são equivalentes por células.

Proposição 1.15 ([52, Lema 6.3]). *Seja $f : P \rightarrow P$ uma função admissível e $g : P \rightarrow P$ uma função fortemente admissível. Então:*

- (a) *Se g é um difeomorfismo, então g^{-1} também é fortemente admissível.*
 (b) *Ambas fg e gf são admissíveis.*

Demonstração. (a) segue diretamente da definição de difeomorfismo aliada a definição de admissibilidade forte, pois basta tomar as respectivas funções pullback. Em (b) note que, fixada uma célula c , ambas $(fg)_c$ e $(gf)_c$ são funções definidas em $P_c \times P_{\mathcal{T}(I(c))}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} (gf)_c(x_c, x_{\mathcal{T}(I(c))}) &= g_c(f_c(x_c, x_{\mathcal{T}(I(c))})) \\ (fg)_c(x_c, x_{\mathcal{T}(I(c))}) &= f_c(g_c(x_c), g_{\mathcal{T}(i_1)}(x_{\mathcal{T}(i_1)}), \dots, g_{\mathcal{T}(i_m)}(x_{\mathcal{T}(i_m)})) \end{aligned}$$

onde $I(c) = \{i_1, \dots, i_m\}$. Seja $\beta : I(d) \rightarrow I(c)$ um isomorfismo de entradas em $B(c, d)$. Ordenamos $I(d) = \{j_1, \dots, j_m\}$ de modo que $\beta(i_l) = j_l$. Segue da definição de isomorfismo de entradas que c e d são equivalentes por entradas para cada l . Daí temos $f_c = f_d$, $g_c = g_d$ e $g_{\mathcal{T}(i_l)} = g_{\mathcal{T}(j_l)}$. Afirmamos que ambas $(fg)_c$ e $(gf)_c$ são relacionadas a $(fg)_d$ e $(gf)_d$ por β . Para verificar isso para gf :

$$\begin{aligned} (gf)_c(x_c, x_{\mathcal{T}(I(c))}) &= g_c(f_c(x_c, x_{\mathcal{T}(I(c))})) \\ &= g_c(f_d(x_d, x_{\mathcal{T}(I(d))})) \\ &= g_d(f_d(x_d, x_{\mathcal{T}(I(d))})) \\ &= (gf)_d(x_d, x_{\mathcal{T}(I(d))}) \end{aligned}$$

De onde segue que gf é admissível. De modo análogo,

$$\begin{aligned} (fg)_d(x_d, x_{\mathcal{T}(j_1)}, \dots, x_{\mathcal{T}(j_m)}) &= f_d(g_d(x_d), g_{\mathcal{T}(j_1)}(x_{\mathcal{T}(j_1)}), \dots, g_{\mathcal{T}(j_m)}(x_{\mathcal{T}(j_m)})) \\ &= f_c(g_d(x_d), g_{\mathcal{T}(j_1)}(x_{\mathcal{T}(j_1)}), \dots, g_{\mathcal{T}(j_m)}(x_{\mathcal{T}(j_m)})) \\ &= f_c(g_c(x_d), g_{\mathcal{T}(i_1)}(x_{\mathcal{T}(j_1)}), \dots, g_{\mathcal{T}(i_m)}(x_{\mathcal{T}(j_m)})) \\ &= (fg)_c(x_d, x_{\mathcal{T}(j_1)}, \dots, x_{\mathcal{T}(j_m)}) \end{aligned}$$

E assim, fg também é admissível. □

1.4.3 Espaço dos Campos Vetoriais \mathcal{G} -admissíveis

Introduzimos algumas notações para o espaço dos campos vetoriais \mathcal{G} -admissíveis em P :

Definição 1.16. Seja \mathcal{G} uma rede. Para uma certa escolha de P_c , defina $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P$ como o conjunto de todos os campos vetoriais \mathcal{G} -admissíveis em P . Seja $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^P$ o subespaço de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P$ que consiste nos campos vetoriais *polinomiais* \mathcal{G} -admissíveis em P e $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^P$ seja o subespaço de $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^P$ que consiste nos campos vetoriais *lineares* \mathcal{G} -admissíveis em P .

Claramente, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Como todos os espaços funcionais, ele pode ser equipado com uma variedade de topologias, mas aqui apenas a estrutura do espaço vetorial

é relevante. O espaço das aplicações $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ -equivalentes tem uma decomposição natural de acordo com as componentes conexas do grupoide $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$, e essa decomposição é herdada pelos campos vetoriais polinomiais e lineares:

Definição 1.17. Seja $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{C}$ uma componente conexa de uma classe de \sim_E -equivalência. Defina

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q}) &= \{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P \mid f_m(x) = 0, \forall m \notin \mathcal{Q}\} \\ \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q}) &= \{f \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^P \mid f_m(x) = 0, \forall m \notin \mathcal{Q}\} \\ \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q}) &= \{f \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^P \mid f_m(x) = 0, \forall m \notin \mathcal{Q}\}.\end{aligned}$$

Dizemos que os campos vetoriais em $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q})$, $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q})$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q})$ são *suportados* em \mathcal{Q} .

Observação 1.18. Pelo Teorema 1.13, existem decomposições em soma direta

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P = \bigoplus_{\mathcal{Q}} \mathcal{F}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q}), \quad \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^P = \bigoplus_{\mathcal{Q}} \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q}) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^P = \bigoplus_{\mathcal{Q}} \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^P(\mathcal{Q})$$

onde \mathcal{Q} varia dentre as classes de \sim_E -equivalência de \mathcal{G} . Para demonstrações detalhadas, consulte Stewart *et al.* [86], final da Seção 4, especialmente a Proposição 4.6.

1.5 EDO-equivalência e linear-equivalência

Como apontado por Golubitsky *et al.* [52], quando permitimos auto-acoplamentos e múltiplas setas, é possível que duas redes diferentes \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 gerem o mesmo espaço de campos vetoriais admissíveis. A Figura 1.8 mostra um exemplo simples, extraído de Golubitsky *et al.* [52]. Em \mathcal{G}_1 , ambas as células têm o mesmo tipo e da mesma forma para \mathcal{G}_2 . Suponha que o espaço de fase para todas as quatro células seja \mathbb{R}^k e identifique esses espaços canonicamente. Então, o espaço total da fase para \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 é $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$.



Figura 1.8: Duas redes \mathcal{G}_1 (esquerda) e \mathcal{G}_2 (direita) que geram o mesmo espaço de campos vetoriais admissíveis.

Os campos vetoriais admissíveis para \mathcal{G}_1 têm a forma

$$F(x_1, x_2) = (f(x_1, x_1, x_2), f(x_2, x_2, x_1))$$

onde $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ pode ser qualquer função suave enquanto que os campos vetoriais

admissíveis para \mathcal{G}_2 têm a forma

$$\tilde{F}(x_1, x_2) = (\tilde{f}(x_1, x_2), \tilde{f}(x_2, x_1))$$

onde $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é qualquer função suave. Agora é fácil ver que o conjunto $\{F\}$ de todos os F é o mesmo que o conjunto $\{\tilde{F}\}$ de todos os \tilde{F} . Ou seja, dado \tilde{f} , podemos definir $f(x, y, z) = \tilde{f}(x, z)$, de modo que $\{F\} \subseteq \{\tilde{F}\}$. Dada f , podemos definir $\tilde{f}(a, b) = f(a, a, b)$ de modo que $\{\tilde{F}\} \subseteq \{F\}$. Portanto, os espaços $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_1}^{P_1}$ e $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_2}^{P_2}$ são os mesmos.

Observe que a comparação dos campos vetoriais admissíveis acima envolve a identificação de células nas duas redes, uma etapa que em geral formalizamos em termos de uma bijeção entre os dois conjuntos de células. Na próxima definição, dada uma rede \mathcal{G}_i e uma escolha do espaço de fase total P_i para \mathcal{G}_i , denotamos por $P_{i,c}$ o espaço de fase correspondente à célula c de \mathcal{C}_i .

Definição 1.19. Duas redes \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são γ -EDO-equivalentes se:

1. Existe uma bijeção $\gamma : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ que preserva \sim_C -equivalência e \sim_E -equivalência, tal que:
2. Se escolhermos os espaços de fase $P_c \neq 0$ para \mathcal{G}_1 e definirmos a escolha correspondente dos espaços de fase para \mathcal{G}_2 por

$$P_{2,\gamma(c)} = P_{1,c}$$

para que os espaços de fase total correspondentes sejam

$$P_1 = \prod_{c \in \mathcal{C}_1} P_{1,c} \quad P_2 = \prod_{c \in \mathcal{C}_2} P_{1,\gamma(c)}$$

então:

3. A condição

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_1}^{P_1} = \mathcal{F}_{\mathcal{G}_2}^{P_2}$$

é satisfeita.

Duas redes \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são EDO-equivalentes se são γ -EDO-equivalentes para alguma bijeção γ .

As redes isomórficas (no sentido usual da teoria de grafos) são sempre EDO-equivalentes. Por outro lado, como apontado por Golubitsky *et al.* [52], redes EDO-equivalentes não são necessariamente isomórficas (veja, por exemplo, a Figura 1.8). Descreveremos condições necessárias e suficientes para que duas redes sejam EDO-equivalentes. Antes, definiremos a noção de “equivalência linear” entre duas redes. Começamos com um exemplo para ilustrar as ideias envolvidas e, em particular, o efeito de múltiplas setas.

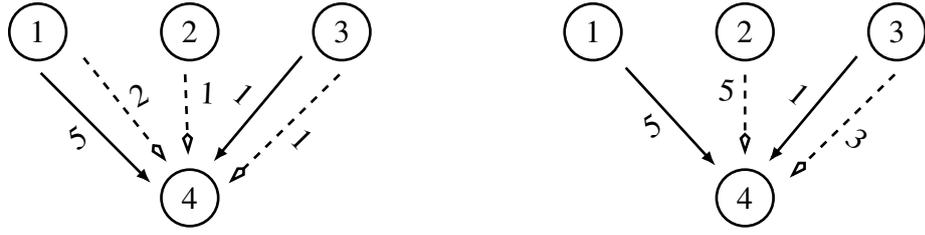


Figura 1.9: Duas redes \mathcal{G}_3 (à esquerda) e \mathcal{G}_4 (à direita). O número p anexado a cada seta simboliza p setas desse tipo.

Exemplo 1.20. Considere as redes de células acopladas \mathcal{G}_3 e \mathcal{G}_4 da Figura 1.9. Nela todas as células são equivalentes em cada grafo, e as classes de \sim_E -equivalência de ambas as redes são:

$$Q_1 = \{1, 2, 3\}, \quad Q_2 = \{4\}$$

A função identidade em $\{1, 2, 3, 4\} = \mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_4$ preserva a \sim_C -equivalência e a \sim_E -equivalência.

Primeiro, escolha todos os espaços de fase das células como $P_c = \mathbb{R}$. Agora, descrevemos os campos vetoriais lineares admissíveis para as duas redes, ou seja, os espaços $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_3}^P$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_4}^P$ das funções lineares grupoide-equivariantes. Denote por Y_c as coordenadas no espaço de fase da célula c , para $c = 1, \dots, 4$, nas duas redes. Qualquer campo vetorial linear \mathcal{G}_3 -admissível $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tem a forma:

$$f_1(Y_1) = aY_1$$

$$f_2(Y_2) = aY_2$$

$$f_3(Y_3) = aY_3$$

$$f_4(Y_4, Y_1, Y_2, Y_3) = bY_4 + c(5Y_1 + Y_3) + d(2Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

onde a, b, c, d são constantes reais, e qualquer campo vetorial linear \mathcal{G}_4 -admissível $G = (g_1, g_2, g_3, g_4) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tem a forma:

$$g_1(Y_1) = eY_1$$

$$g_2(Y_2) = eY_2$$

$$g_3(Y_3) = eY_3$$

$$g_4(Y_4, Y_1, Y_2, Y_3) = hY_4 + j(5Y_1 + Y_3) + \ell(5Y_2 + 3Y_3)$$

onde e, h, j, ℓ são constantes reais. Agora, lembrando da Definição 1.12 e adotando a notação $\text{span}_{\mathbb{R}}\{z_1, \dots, z_m\}$ para o espaço vetorial real gerado por z_1, \dots, z_m , vemos que

$$\text{span}_{\mathbb{R}}\{Y_4, 5Y_1 + Y_3, 2Y_1 + Y_2 + Y_3\} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{Y_4, 5Y_1 + Y_3, 5Y_2 + 3Y_3\} \quad (1.10)$$

pois $5Y_2 + 3Y_3 = 5(2Y_1 + Y_2 + Y_3) - 2(5Y_1 + Y_3)$ e $2Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{2}{5}(5Y_1 + Y_3) + \frac{1}{5}(5Y_2 + 3Y_3)$. Portanto, o espaço $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_3}^P$ dos campos vetoriais lineares \mathcal{G}_3 -admissíveis em \mathbb{R}^4 é igual ao o espaço $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_4}^P$ dos campos vetoriais lineares \mathcal{G}_4 -admissíveis em \mathbb{R}^4 .

Definição 1.21. Duas redes \mathcal{G}_3 e \mathcal{G}_4 são γ -linear-equivalentes se:

1. Existe uma bijeção $\gamma : \mathcal{C}_3 \rightarrow \mathcal{C}_4$ que preserva \sim_C -equivalência e \sim_E -equivalência, tal que:
2. Se escolhermos os espaços de fase $P_c \neq 0$ para \mathcal{G}_3 e definirmos a escolha correspondente dos espaços de fase para \mathcal{G}_4 por

$$P_{4,\gamma(c)} = P_{3,c}$$

para que os espaços de fase total correspondentes sejam

$$P_3 = \prod_{c \in \mathcal{C}_3} P_{3,c} \quad P_4 = \prod_{c \in \mathcal{C}_4} P_{4,\gamma(c)}$$

então:

3. A condição

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}_3}^{P_3} = \mathcal{L}_{\mathcal{G}_4}^{P_4}$$

é satisfeita.

Duas redes \mathcal{G}_3 e \mathcal{G}_4 são *linear-equivalentes* se são γ -linear-equivalentes para alguma bijeção γ .

Dias e Stewart [31] reduzem a EDO-equivalência a linear-equivalência estabelecendo e provando o seguinte resultado:

Teorema 1.22 ([31, Teorema 7.2]). *Seja $\gamma : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ uma bijeção que preserva a equivalência de células e a equivalência de entradas. Então, duas redes \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são γ -EDO-equivalentes se, e somente se, forem γ -linear-equivalentes.*

Se considerarmos $P_c = \mathbb{R}^k$ para $k > 1$ no Exemplo 1.20, um cálculo idêntico pode ser realizado, com a única modificação sendo que Y_j agora representa vetores arbitrários em \mathbb{R}^k . No entanto, a condição (1.10) pode ser interpretada como a condição de que as linhas das matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

devem gerar os mesmos subespaços de \mathbb{R}^4 . As entradas nessas matrizes são determinadas pela topologia da rede correspondente (a matriz de tipos, como veremos adiante na Seção 1.7.2.1), portanto, essa condição não depende do tamanho de k . Esse fato é generalizado como:

Corolário 1.23. Com a identificação $\gamma : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ acima descrita, os espaços $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_1}^P$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_2}^P$ são iguais quando todos os espaços de fase de células são consideradas como sendo \mathbb{R} .

1.6 Simetrias Globais

O formalismo para dinâmica de redes introduzido em Golubitsky *et al.* [52] e Stewart *et al.* [86] originalmente surgiu da dinâmica simétrica, especificamente em redes simétricas de osciladores acoplados, como por exemplo em Golubitsky e Stewart [45]. Aumentaremos agora nossas observações introdutórias sobre simetria global e as tornamos mais precisas.

Definição 1.24. Seja $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ uma rede. Uma simetria (global) de \mathcal{G} é uma permutação σ de \mathcal{C} tal que o conjunto de setas da célula c para a célula d é isomorfo ao conjunto de setas da célula $\sigma(c)$ para $\sigma(d)$. Ou seja, o número de setas de um tipo é o mesmo em ambos os casos.

O grupo de simetria de \mathcal{G} é o grupo formado por todas as permutações σ possíveis e é denotado por $\text{Sim}(\mathcal{G})$. A ação de σ nas setas induz uma ação nas células se exigimos $\sigma(\mathcal{T}(s)) = \mathcal{T}(\sigma(s))$, ou $\sigma(\mathcal{H}(s)) = \mathcal{H}(\sigma(s))$, ou ambas. Note que estas condições são consistentes pois setas equivalentes tem cabeças e caudas equivalentes.

Há uma conexão entre funções admissíveis e funções simétricas (ou seja, *equivariantes*). Elas satisfazem

$$f(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$$

onde σ age permutando índices em x_c e f_c .

Teorema 1.25. Qualquer função \mathcal{G} -admissível é $\text{Sim}(\mathcal{G})$ -equivariante.

Demonstração. Segue diretamente das respectivas definições. □

Exemplo 1.26. Em geral, a recíproca não é verdadeira: funções equivariantes não precisam ser admissíveis. A maneira mais simples disso ocorrer é quando as funções têm os domínios errados. Mas satisfazer a condição de domínio e ser equivariante não implica em admissibilidade. Para ver o porquê, considere a Figura 1.10 abaixo.

Essa rede tem grupo de simetria diedral \mathbb{D}_5 determinado por todas as rotações e reflexões do pentágono. Nela temos dois tipos de seta: curta (sólida) e longa (tracejada).

Considere uma simetria global que fixa a célula 1. Esta pode ser a identidade ou age nas células pela permutação refletiva (25)(34). O grupo de vértice $B(1, 1)$ é maior, pois como não há setas múltiplas podemos definir sua ação sobre setas considerando o efeito em suas caudas.

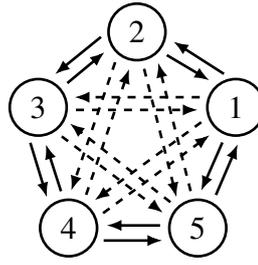


Figura 1.10: Rede com grupo de simetria diedral \mathbb{D}_5 .

Deste modo, esse grupo contém a identidade, $(25)(34)$ mas também (25) e (34) separadamente. Temos que (25) troca as setas curtas entrando na célula 1 enquanto (34) permuta as setas longas.

A função

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2x_4 + x_3x_5 \\ x_1x_4 + x_3x_5 \\ x_1x_4 + x_2x_5 \\ x_1x_3 + x_2x_5 \\ x_1x_3 + x_2x_4 \end{bmatrix}$$

é \mathbb{D}_5 -equivariante mas não é admissível. A obtemos fazendo f_1 invariante por $(25)(34)$ mas não por (25) ou (34) e então definimos as outras componentes com ajuda da aplicação pullback. Uma função admissível análoga teria $f_1(x) = x_2x_4 + x_2x_3 + x_3x_5 + x_4x_5$, o qual é invariante por $B(1, 1)$ inteiro.

Exemplos como este necessitam estar em mente quando se aplica dinâmica equivariante e teoria de bifurcação para redes simétricas. Em princípio, as restrições adicionais em funções admissíveis poderiam mudar um comportamento genérico. Esse efeito ocorre, por exemplo, na bifurcação estacionária de algumas redes ditas *regulares* (ver [82, 84]), fazendo com que singularidades mais degeneradas sejam genéricas. Essas redes, no entanto, não são muito comuns.

1.7 Redes Quocientes e Sincronia

Uma questão básica na dinâmica de redes é: quando duas células são síncronas? Definimos a sincronia por séries temporais idênticas: se $x = x(t)$ é uma solução de um SCA, dizemos que as células c e d são síncronas em x se $x_c(t) = x_d(t)$ para todo t .

Essa é uma forte condição e por isso, muitas aplicações usam uma versão mais fraca na qual as séries temporais estão próximas ou são iguais na maior parte de um intervalo de tempo.

Um tipo muito forte de sincronia ocorre para qualquer SCA e pode ser associado com respeito a um subespaço de espaço de fase que é invariante para todas as funções admissíveis f .

Nele as células são sincronizadas em **partições**, de modo que todas as células numa determinada partição tenham séries temporais idênticas. Para expor essa ideia, retornamos ao Exemplo 1.8.

Exemplo 1.27. Na Figura 1.11 (esquerda), atribuímos **cores** às células, como mostrado abaixo. Neste exemplo, as células 1 e 2 têm a mesma cor e as células 3 e 5 têm a mesma cor. Assim, o conjunto de células \mathcal{C} é particionado em três subconjuntos, determinados pela mesma cor: $\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}$ (tecnicamente, poderíamos usar classes de equivalência com a relação “ter mesma cor” mas é intuitivamente mais simples pensar em cores).

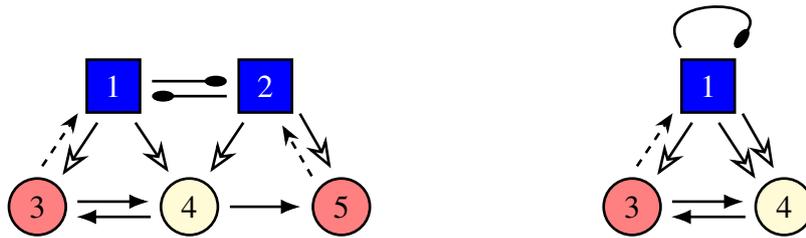


Figura 1.11: *Esquerda:* Uma coloração da rede de 5 células. *Direita:* Rede quociente correspondente.

Uma determinada rede pode ser colorida de várias maneiras, mas essa escolha tem uma característica especial que se torna aparente se procurarmos soluções nas quais as células da mesma cor sejam síncronas, ou seja, se definirmos $x_1 = x_2 = u$, $x_3 = x_5 = v$, $x_4 = w$, então

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (u, u, v, w, v)$$

Daí o SCA em (1.8) agora se torna

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, u, v) \\ \dot{u} &= f(u, u, v) \\ \dot{v} &= g(v, u, v) \\ \dot{w} &= h(w, u, u, v) \\ \dot{v} &= g(v, u, w) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Apesar de termos cinco equações para três variáveis, o sistema não é sobredeterminado porque a segunda equação é a mesma que a primeira, assim como a quinta e a terceira.

Se projetarmos (u, u, v, w, v) em (u, v, w) , obtemos um *SCA restrito* expresso como

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, u, v) \\ \dot{v} &= g(v, u, w) \\ \dot{w} &= h(w, u, u, v) \end{aligned}$$

Reconhecemos isso como uma EDO para uma rede menor, na qual células da mesma cor são identificadas com uma única célula e conjuntos de entradas continuam os mesmos. A chamada *rede quociente* é mostrada na Figura 1.11 (direita).

Tal construção funciona porque o espaço

$$\Delta = \{(u, u, v, w, v) \mid u \in P_1, v \in P_3, w \in P_4\}$$

é invariante para todas as funções admissíveis, e assim, também é fluxo-invariante às correspondentes EDOs. Ela apresenta a agradável propriedade de que o espaço de SCAs restritos é *precisamente* o espaço dos SCAs da rede quociente desde que as mesmas coordenadas de células sejam usadas.

Note que a rede quociente tem uma seta dupla da célula 1 para 4 e uma auto-conexão na célula 1. Porém, a rede original não possui setas múltiplas. Setas múltiplas e auto-conexões são consequências naturais do SCA restrito. A equação para \dot{w} envolve duas entradas u que correspondem às duas setas de 1 para 4 enquanto a equação de \dot{v} tem duas entradas u : uma para a coordenada da célula e outra a coordenada de entrada vinda da célula 2. O formalismo mais restrito em Stewart et al. [86] não levou em conta este efeito, levando a complicações na caracterização de SCAs restritos [30], o qual foi corrigido com a modificação batizada “multi-arrow” em Golubitsky et al. [52] que contorna isso de maneira satisfatória permitindo múltiplas setas e auto-conexões.

1.7.1 Colorações Balanceadas

Na Figura 1.11 as células são coloridas de acordo com a equivalência de entrada. No entanto, este tipo de coloração nem sempre produz uma relação de sincronia consistente. O próximo passo é caracterizar quais delas fazem.

Definição 1.28. Uma *coloração* de uma rede \mathcal{G} é um mapa

$$\kappa : \mathcal{C} \rightarrow K$$

onde K é um conjunto finito cujos elementos são chamados *cores*.

Dizemos que c e d tem a mesma cor se $\kappa(c) = \kappa(d)$ e escrevemos $c \sim_\kappa d$. Uma coloração κ é dita *balanceada* se, sempre que $\kappa(c) = \kappa(d)$, então existe um isomorfismo de entradas $\beta : I(c) \rightarrow I(d)$ tal que i e $\beta(i)$ têm a mesma cor para todo $i \in \mathcal{T}(I(i))$.

Na prática, uma coloração é balanceada se existe um isomorfismo de entradas que preserva cores. Em particular, células da mesma cor devem ser equivalentes por entradas. Assim, uma coloração balanceada é um refinamento da equivalência de entradas.

Definição 1.29. A *polidiagonal* definida por uma coloração κ de \mathcal{G} é o espaço

$$\Delta_\kappa = \{x \in P \mid \kappa(c) = \kappa(d) \implies x_c = x_d\}$$

Ou seja, células da mesma cor são síncronas para $x \in \Delta_\kappa$.

Teorema 1.30 ([48, Teorema 7.2]). *Uma polidiagonal Δ_κ é invariante para toda função admissível se, e somente se, κ é balanceada.*

Demonstração. A prova, apresentada em [52, 86], pode ser resumida da seguinte forma. Ao construir campos vetoriais lineares admissíveis apropriados, podemos mostrar que, se um subespaço polissíncrono for fluxo-invariante em todos os campos vetoriais admissíveis lineares, a equivalência \sim_κ associada deve ser balanceada. O processo de restrição nos diz que, quando \sim_κ é balanceada, o subespaço polissíncrono correspondente Δ_κ é fluxo-invariante em todos os campos vetoriais admissíveis (lineares ou não pelo Corolário 1.23). Claramente, a fluxo-invariância em todos os campos vetoriais admissíveis implica fluxo-invariância em todos os campos vetoriais lineares admissíveis. \square

Uma consequência é que quando κ é balanceada, condições iniciais que tem o padrão de sincronia definido por κ (ou seja, que estão em Δ_κ) dão origem a soluções que permanecem dentro de Δ_κ . Porém, esse resultado não garante que o padrão de sincronia seja estável: perturbações que quebram a sincronia podem fazer com que a solução se desvie de Δ_κ em vez de retornar para perto dela. Esse tipo de estabilidade depende do campo vetorial admissível; mais precisamente, de seu componente transversal a Δ_κ .

Definição 1.31. Seja κ uma coloração balanceada de \mathcal{G} com conjunto de cores K . A *rede quociente associada* \mathcal{G}_κ tem K como seu conjunto de células (ou seja, exibe uma célula por cor).

O tipo de célula de $i \in K$ é o de qualquer célula $c \in \mathcal{C}$ com cor i (ou seja, $\kappa(c) = i$).

As setas de $I(i)$ em \mathcal{G}_κ são obtidas a partir do conjunto de entradas $I(c)$ de qualquer célula c com cor i copiando cada seta s para criar uma seta com cabeça $\kappa(\mathcal{H}(s))$ e cauda $\kappa(\mathcal{T}(s))$ do mesmo tipo que s . O conjunto de setas de \mathcal{G}_κ é dado por $\bigcup_{i \in K} I(i)$. As vezes, escrevemos $\mathcal{G}_\kappa = \mathcal{G} / \sim_\kappa$.

Exemplo 1.32. Retornamos ao Exemplo 1.27 para clarear a definição de coloração balanceada.

Primeiro, conferimos que a coloração na Figura 1.11 de fato é balanceada:

- Células 1 e 2 têm a mesma cor. Portanto, devemos verificar se os conjuntos de entrada delas são coloridos da mesma maneira.
- A célula 1 tem duas setas de entrada: uma da célula 2 (de ponta arredondada) e outra da célula 3 (linha tracejada).
- A célula 2 tem duas setas de entrada: uma da célula 1 (de ponta arredondada) e outra da célula 5 (linha tracejada).
- As células das caudas são (2, 3) e (1, 5), respectivamente. As células correspondentes a 1 e 2 têm a mesma cor e as células correspondentes a 3 e 5 têm a mesma cor.
- Da mesma forma, as células 3 e 5 têm a mesma cor e seus conjuntos de entrada combinam de uma maneira que preserva as cores.
- Finalmente, a célula 4 tem uma cor própria, então não há mais o que verificar.

A Figura 1.11 (direita) mostra a rede de quociente correspondente com uma célula para cada cor. Por conveniência, rotulamos estes por representantes 1, 3, 4 dessas cores. As setas são desenhadas para imitar os conjuntos de entrada na rede original, Figura 1.11 (esquerda).

Ressaltamos que, embora neste caso particular as cores correspondam a classes de equivalência de entrada de células, a coloração por equivalência de entradas não precisa ser balanceada. Por outro lado, muitas outras colorações balanceadas podem existir, dependendo da rede.

Exemplo 1.33. A Figura 1.12 mostra uma cadeia de 7 células idênticas com acoplamentos idênticos com um anel das células 1, 2 e 3 (Não há nada de especial sobre os números aqui e ambos 3 e 7 podem ser substituídos em cadeias com modificações apropriadas).

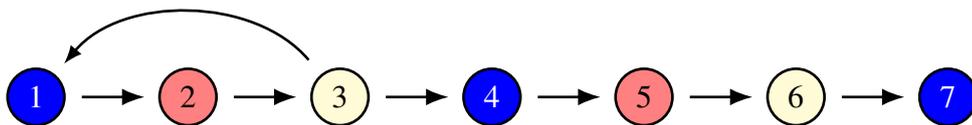


Figura 1.12: Coloração balanceada de uma cadeia de alimentação direta apresentando *onda viajante*.

A coloração mostrada é balanceada e a rede quociente correspondente é o anel \mathbb{Z}_3 -simétrico como o do Exemplo 1.2. Com equações admissíveis adequadas, este anel é conhecido por suportar uma onda rotativa com deslocamento de fase de $1/3$ do período. Portanto, sendo assim induzida, a cadeia original suporta um estado com três partições síncronas, formadas por células

$\{3k + 1\}, \{3k + 2\}, \{3k\}$, com x_i, x_{i+1} sendo síncronas exceto por um deslocamento de fase de $1/3$ do período. O efeito é semelhante a uma onda viajante em que as células em ordem numérica “disparam em sequência” enquanto células $i, i - 3, i - 6, \dots$ são síncronas.

Essa cadeia de 7 células não tem simetria no sentido global, mas sua rede quociente de células simétricas implica que certos estados sincronizados na cadeia podem se comportar de uma maneira típica de anéis simétricos de células.

Esse exemplo motiva (e ilustra a resposta) uma interessante questão recíproca: se certas células têm séries temporais idênticas além de uma mudança de fase, isso implica algum tipo de simetria global da rede? Notavelmente, a resposta, sujeita a condições razoáveis, é “sim”. Mas, como mostra o Exemplo 1.33, devemos antes conferir a rede quociente.

O Teorema 1.34 é o primeiro e o mais fraco de uma série de resultados que demonstram o papel central desempenhado pelas colorações balanceadas (consulte [4] para uma visão geral desses resultados e implementação computacional). Intuitivamente, o resultado é direto: se duas células permanecem sincronizadas com o passar do tempo, as entradas para essas células também devem ser sincronizadas. No entanto, isso não implica necessariamente que os estados dessas células de entrada estejam sincronizados. Por outro lado, este deve ser o caso para a maioria dos campos vetoriais admissíveis e a prova do Teorema 1.34 é relativamente simples: requer apenas uma escolha sensata do campo vetorial admissível.

Teorema 1.34 ([52, Teorema 5.2]). *Seja κ uma coloração balanceada de \mathcal{G} . Então:*

- (a) *A restrição de qualquer função \mathcal{G} -admissível a Δ_κ é \mathcal{G}_κ -admissível.*
- (b) *Toda função \mathcal{G}_κ -admissível é uma restrição a Δ_κ de uma função \mathcal{G} -admissível.*

Outro jeito de estabelecer (b) acima é dizer que toda função \mathcal{G}_κ -admissível em Δ_κ levanta uma função \mathcal{G} -admissível em P . Se f é \mathcal{G} -admissível, sua restrição $f|_{\Delta_\kappa}$ determina a dinâmica das partições determinadas pela coloração κ em f .

1.7.2 Teorema do Levantamento

O formalismo aqui empregado para redes permite múltiplas setas (várias setas unindo o mesmo par de nós) e auto-acoplamentos (setas unindo um nó a si mesmo). Esse recurso tem importantes vantagens técnicas, mas também causa complicações. Frequentemente, essas complicações podem ser evitadas aplicando o *Teorema do Levantamento*, que afirma que qualquer rede \mathcal{G} é um quociente de uma rede \mathcal{G}^* na qual todas as setas são únicas e os laços não ocorrem.

As aplicações do Teorema do Levantamento incluem a conjectura de oscilação total [44]. Por sua vez, isso se aplica à caracterização de padrões de fase rígidos [42].

Um caso especial do Teorema do Levantamento foi estabelecido e parcialmente provado em [52]. Uma prova completa no caso geral foi apresentada por Stewart [80]. Ambas as provas são indutivas, mas nessa seção descreveremos uma prova não indutiva do Teorema do Levantamento fornecida por [81]. Para explicar o resultado, suponha que o conjunto de células seja $\mathcal{C} = \{1, \dots, n\}$ e seja $m(i, j)$ o número total de setas com cauda i e cabeça j , independentemente do tipo de seta. Seja

$$n(i, j) = \begin{cases} m(i, j) & \text{se } i \neq j \\ m(i, j) + 1 & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (1.12)$$

Então defina

$$p_j = \max_i [n(i, j)] \quad (1.13)$$

Definição 1.35. Dizemos que uma rede é *uniforme* se não tiver múltiplas setas ou laços.

A ideia por trás da prova é simples, apesar da notação necessária. A ideia essencial é mostrada na Figura 1.13. Cada célula $c \in \mathcal{C}$ é expandida para um conjunto de células (c, i) onde $1 \leq i \leq p_c$. Esse conjunto forma uma classe de equivalência para uma relação de equivalência $\sim_\kappa = \boxtimes$, de modo que a rede original seja o quociente da rede expandida por essa relação. Se $c \neq d \in \mathcal{C}$, múltiplas setas de d a c são separadas em setas únicas de $(d, 1), \dots, (d, n(d, c))$ a (c, i) para cada i . Um laço múltiplo de c a c é separado em setas únicas de (c, j) a (c, i) , onde $1 \leq i \leq n(c, c)$ e $j \neq i$. Os tipos das setas únicas são determinados para produzir um isomorfismo de entrada com o conjunto de entradas de c .

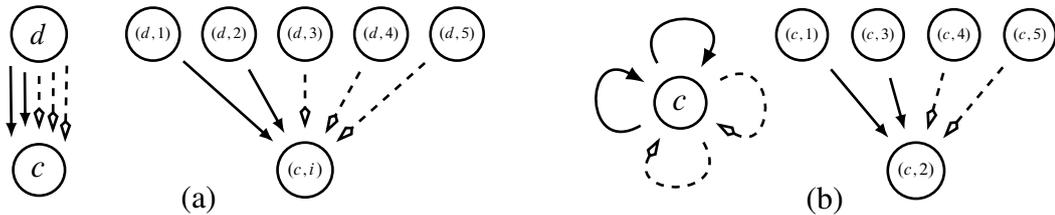


Figura 1.13: (a) Separando múltiplas setas. (b) Separando múltiplos laços.

Considere duas redes \mathcal{G}_j , para $j = 1, 2$. Defina as respectivas células sendo \mathcal{C}_j , com setas \mathcal{S}_j e as relações de equivalência de célula e seta sejam $\sim_{\mathcal{C}}^j, \sim_{\mathcal{S}}^j$ e conjuntos de entradas por $I_j(c)$.

Definição 1.36. Um mapa quociente $\phi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ é um par de mapas $(\phi_{\mathcal{C}}, \phi_{\mathcal{S}})$ onde

$$\phi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2, \quad \phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$$

são sobrejeções, de modo que as seguintes condições se apliquem:

- (a) Para todo $s \in \mathcal{S}_1$, temos $\mathcal{T}(\phi_S(s)) = \phi_C(\mathcal{T}(s))$, $\mathcal{H}(\phi_S(s)) = \phi_C(\mathcal{H}(s))$.
- (b) Para todo $c, d \in \mathcal{C}_1$, temos $\phi_C(c) \sim_C^2 \phi_C(d)$ se, e somente se, $c \sim_C^1 d$.
- (c) Para todo $s, t \in \mathcal{S}_1$, temos $\phi_S(s) \sim_S^2 \phi_S(t)$ se, e somente se, $s \sim_S^1 t$.

Se $c \in \mathcal{C}_1$, defina o mapa $\phi_I^c(c) : I_1(c) \rightarrow I_2(\phi_C(c))$ induzido por

$$\phi_I^c(s) = \phi_S(s), \quad s \in I_1(c).$$

Então

- (d) O mapa ϕ_I^c é uma bijeção para todo c .

Pelas partes (b) e (c) da definição, ϕ_I^c preserva os tipos de célula e seta no sentido em que as \sim_C^1 -classes são mapeadas bijectivamente para as \sim_C^2 -classes e as \sim_S^1 -classes são mapeadas bijectivamente para \sim_S^2 -classes.

Há uma simplificação útil. Podemos identificar tipos de células em \mathcal{C}_1 com os tipos de células correspondentes em \mathcal{C}_2 introduzindo uma relação \sim_C na união disjunta $\mathcal{G}_1 \dot{\cup} \mathcal{G}_2$ definindo \sim_C como o mesmo que \sim_C^j em \mathcal{G}_j ($j = 1, 2$) e depois definindo

$$c \sim_C \phi_C(c), \quad \forall c \in \mathcal{C}.$$

Podemos fazer o mesmo para \sim_S^j , para obter \sim_S . Agora ϕ_I^c preserva os tipos de célula e seta em um sentido mais forte: torna-se um isomorfismo de entrada. Chamamos essa extensão das relações \sim_C^j, \sim_S^j de *identificação de tipos canônica*.

Proposição 1.37 ([81, Proposição 2.2]). *Suponha que $\phi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ é um mapa quociente. Defina \bowtie em \mathcal{C}_1 por*

$$c \bowtie d \iff \phi_C(c) = \phi_C(d).$$

Então \bowtie é uma relação de equivalência balanceada e $\mathcal{G}_1 / \bowtie \cong \mathcal{G}_2$.

Demonstração. Primeiro, provamos que \bowtie é balanceada. Para fazer isso, usamos a identificação de tipo canônica. Suponha que $c \bowtie d$. Então $\phi_C(c) = \phi_C(d)$. Considere os mapas induzidos

$$\begin{aligned} \phi_I^c(c) &: I_1(c) \rightarrow I_2(\phi_C(c)) \\ \phi_I^d(d) &: I_1(d) \rightarrow I_2(\phi_C(d)) = I_2(\phi_C(c)) \end{aligned}$$

Com a identificação de tipos canônica, existem isomorfismos de entrada; portanto, c e d são isomorfos por entradas via

$$\beta = (\phi_I^d)^{-1} \circ \phi_I^c.$$

Resta provar que existe um isomorfismo de entrada que preserva \bowtie entre as células c, d . Afirmamos que β tem essa propriedade. Isto se seguirá se ϕ_I^c, ϕ_I^d preservam $\overline{\bowtie}$ em $\mathcal{G}_1 \dot{\cup} \mathcal{G}_2$, que definimos da seguinte forma: $\overline{\bowtie}$, que coincide com \bowtie em \mathcal{G}_1 , é a relação de igualdade em \mathcal{G}_2 e

$$c \overline{\bowtie} \phi_C(c).$$

Nesse cenário resta provar que ϕ_I^c preserva \bowtie . O mesmo vale para ϕ_I^d e então para β . Portanto, devemos provar que, para todo $s \in I_1(c)$, temos

$$\mathcal{T}(\phi_I^c(s)) \overline{\bowtie} \mathcal{T}(s).$$

Pela definição de \bowtie , isso é equivalente a $\phi_c(\mathcal{T}(s)) = \mathcal{T}(\phi_I^c(s))$. Mas como $\phi_I^c(s) = \phi_S(s)$, então $\mathcal{T}(\phi_I^c(s)) = \mathcal{T}(\phi_S(s)) = \phi_c(\mathcal{T}(s))$ pela condição (a) da Definição tal.

Em seguida, provamos que $\mathcal{G}_1 / \bowtie \cong \mathcal{G}_2$. De fato, o mapa quociente ϕ determina um isomorfismo canônico Φ da seguinte maneira: seja $[c]$ a \bowtie -classe de $c \in \mathcal{C}_1$. Defina

$$\Phi([c]) = \phi_C(c).$$

Como isso está bem definido, temos o isomorfismo desejado. \square

1.7.2.1 Interpretação Matricial

Faremos uso da *matriz de tipos* da uma rede, que é uma generalização da matriz de adjacência de um grafo [18] que leva em consideração *tipos de setas*. Essa versão generaliza o resultado de Aguiar *et al.* [3, Seção 2] que restringem a atenção a redes homogêneas regulares que discutiremos melhor no Capítulo 2.

Introduzimos símbolos de tipo $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ que correspondem bijetivamente ao conjunto de \sim_C -classes e β_1, \dots, β_q que correspondem bijetivamente ao conjunto de \sim_S -classes. O símbolo de tipo de uma célula ou seta é o símbolo correspondente à \sim_C -classe ou \sim_S -classe dessa célula ou flecha, respectivamente. Seja o semigrupo comutativo livre em $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_q\}$ com a operação de adição e denotado por \mathfrak{T} . Então \mathfrak{T} pode ser pensado como consistindo em todas as combinações lineares formais

$$\rho_1 \alpha_1 + \dots + \rho_r \alpha_r + \eta_1 \beta_1 + \dots + \eta_q \beta_q \tag{1.14}$$

onde os coeficientes ρ_i, η_j são inteiros não-negativos. Se $c, d \in \mathcal{C}$ com $c \neq d$, então o *símbolo de entrada* de (c, d) é

$$\tau_{cd} = \eta_1 \beta_1 + \dots + \eta_q \beta_q \tag{1.15}$$

onde η_j é o número de setas saindo de d para c cujo símbolo do tipo de seta é β_j . Se $c \in \mathcal{C}$, o símbolo de entrada de (c, c) é

$$\tau_{cc} = \alpha_i + \eta_1\beta_1 + \dots + \eta_q\beta_q \tag{1.16}$$

onde α_i é o símbolo da célula c e η_j é o número de setas saindo de d para c cujo símbolo do tipo de seta é β_j .

O comprimento de τ_{cd} é o número total de símbolos de tipos individuais que ocorrem:

$$|\tau_{cd}| = \begin{cases} \eta_1 + \dots + \eta_q & \text{se } c \neq d \\ 1 + \eta_1 + \dots + \eta_q & \text{se } c = d . \end{cases}$$

de modo que $|\tau_{cd}| = n(c, d)$ como em (1.12). A matriz de tipos de uma rede é então dada por $T = [\tau_{cd}]$ que é uma matriz sobre elementos de \mathfrak{T} . Ela tem o mesmo papel que a matriz de adjacência de um grafo, mas também codifica os tipos de seta.

Exemplo 1.38. A Figura 1.14 (esquerda) mostra uma rede \mathcal{N} com dois tipos de células, quatro tipos de setas, múltiplas setas e laços com uma atribuição de símbolos de tipo na Figura 1.15.

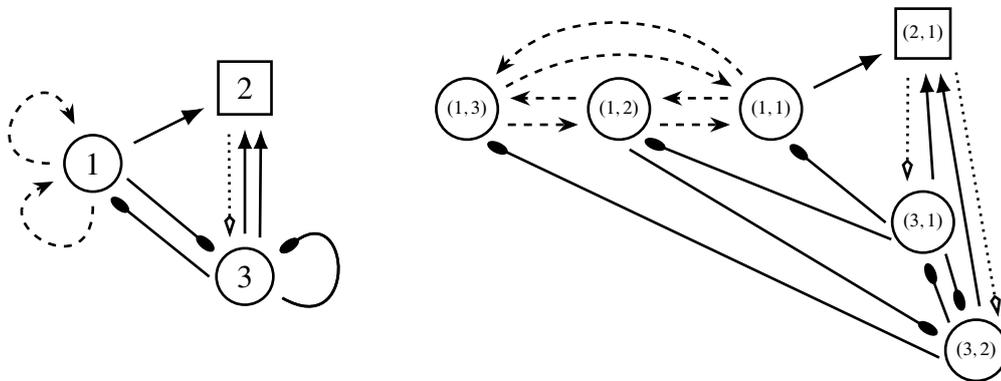


Figura 1.14: Esquerda: uma rede \mathcal{N} com dois tipos de células, quatro tipos de setas, múltiplas setas e laços. Direita: levantamento uniforme minimal de \mathcal{N} .



Figura 1.15: Atribuição de tipos de célula e seta para o Exemplo 1.38.

A matriz de tipos \bar{T} é mostrada abaixo. Com a mesma atribuição de símbolos de tipo, a matriz de tipo T da rede levantada na Figura 1.14 (direita) é mostrada ao lado.

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\beta_1 & 0 & \beta_3 \\ \beta_4 & \alpha_2 & 2\beta_4 \\ \beta_3 & \beta_2 & \alpha_1 + \beta_3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_3 \\ \beta_4 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_4 & \beta_4 \\ \beta_3 & 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_1 & \beta_3 \\ 0 & \beta_3 & 0 & \beta_2 & \beta_3 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Note que as células são ordenadas lexicograficamente. A coloração balanceada \bowtie e a matriz de tipos da rede quociente correspondente são visíveis na forma de T , pois sua estrutura de blocos corresponde às \bowtie -classes. Em cada bloco, cada linha tem a mesma soma em \mathfrak{T} . Essa soma é a entrada correspondente de \bar{T} .

Esse padrão observado é geral. Suponha que \mathcal{G} seja uma rede com uma coloração balanceada \bowtie e seja $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\bowtie$. As células \mathcal{C} de \mathcal{G} são particionadas por \bowtie nas classes de equivalência $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ correspondentes à k cores. Seja c_1, \dots, c_k um conjunto de representantes de \mathcal{C}_j , de modo que $c_j \in \mathcal{C}_j$ para todo j . As células correspondentes de $\bar{\mathcal{G}}$ podem ser escritas como $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k$ e formar o conjunto $\bar{\mathcal{C}}$.

Seja T a matriz de tipos de \mathcal{G} e \bar{T} a matriz de tipos de $\bar{\mathcal{G}}$. Escreva T como uma matriz de blocos, com os blocos correspondentes às partições das células em $\mathcal{C}_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathcal{C}_k$. Escreva \bar{T} como uma matriz determinada pela correspondente ordenação de células c_1, \dots, c_k . Podemos então enunciar a seguinte versão do Teorema do Levantamento:

Teorema 1.39 ([81, Teorema 4.2]). *Seja \mathcal{G} uma rede de células acoplada com células \mathcal{C} . Seja \bowtie uma coloração de \mathcal{C} . Então, \bowtie é balanceada se, e somente se, todos os blocos na partição correspondente da matriz de tipos T de \mathcal{G} forem tais que todas as linhas tenham a mesma soma em \mathfrak{T} . A matriz dessas somas de linha é a matriz de tipos \bar{T} de \mathcal{G}/\bowtie .*

Demonstração. Como τ_{cd} codifica o número de setas de d a c de qualquer tipo, duas linhas de um bloco têm a mesma soma em \mathfrak{T} se, e somente se, os conjuntos correspondentes de setas de entrada são isomorfos. Como cada bloco corresponde a uma cor única, a união desses isomorfismos é um isomorfismo de cores. O restante segue da Proposição 1.37. \square

Capítulo 2

REDES REGULARES E TEORIA LINEAR

Neste capítulo começaremos a mudar nosso foco para uma classe de redes ditas *regulares*. Como um dos mais predominantes e estudados fenômenos em Sistemas Dinâmicos, bifurcações descrevem a mudança repentina de propriedades de um certo sistema sujeito à variação de um parâmetro. Nossa meta aqui será mostrar que o subespaço central de uma bifurcação de quebra de sincronia com codimensão um é isomorfo a um autoespaço generalizado da matriz de adjacência dessa rede, ao menos quando a dimensão dos nós é maior que um (veja Golubitsky e Lauterbach [40]). Introduziremos agora os vários termos empregados nessa afirmação.

2.1 Redes Regulares

Uma rede é dita *homogênea* quando todas as suas células são idênticas no sentido de que os espaços de fase P_c de cada célula c são os mesmos. A sua principal característica é que cada uma das funções componentes do campo vetorial independe do índice j no sistema de equações diferenciais ($f_j = f$ para todo j), ou seja,

$$\dot{x}_j = f(x_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}). \quad (2.1)$$

Uma rede homogênea pode ser exibida por um grafo direcionado com nós idênticos mas que pode ter diferentes tipos de setas.

Porém, para a rede ser homogênea, cada nó deve receber o mesmo número de entradas de cada tipo de seta. Exemplos de anéis homogêneos de 3 células são exibidos na Figura 2.1. Observe que na terceira rede há 2 tipos de acoplamento indicados por setas sólidas e tracejadas.

Cada arquitetura de rede está associada com uma classe de campos vetoriais admissíveis como descrito acima. As classes associadas com cada uma das redes na Figura 2.1 são dadas por

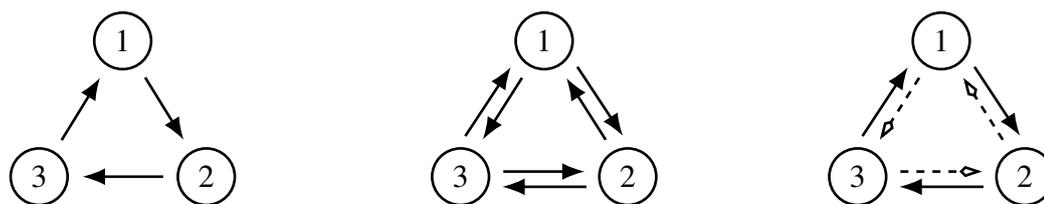


Figura 2.1: Redes de três células homogêneas: (esquerda) anel unidirecional; (centro) anel bidirecional; (direita) anel direcionalmente acoplado.

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_3),$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2, x_1),$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3, x_2),$$

$$\dot{x}_1 = g(x_1, \overline{x_2, x_3}),$$

$$\dot{x}_2 = g(x_2, \overline{x_3, x_1}),$$

$$\dot{x}_3 = g(x_3, \overline{x_1, x_2}),$$

$$\dot{x}_1 = h(x_1, x_2, x_3),$$

$$\dot{x}_2 = h(x_2, x_3, x_1),$$

$$\dot{x}_3 = h(x_3, x_1, x_2).$$

onde a barra sobre g indica que os 2 acoplamentos de uma dada célula são idênticos e, por conta disso, as respectivas variáveis podem ser intercambiadas; ou seja, $g(x, y, z) = g(x, z, y)$.

Definição 2.1. Uma rede homogênea é *regular* se possui todos os acoplamentos do mesmo tipo.

Definição 2.2. A *valência* de uma rede regular é o número de setas que entram em cada célula.

Note que as duas primeiras redes na Figura 2.1 são regulares enquanto a terceira não é.

Definição 2.3. A *matriz de adjacência* de uma rede regular é dada pela matriz $A = [a_{ij}]$, onde a_{ij} representa o número de setas recebidas pela célula i que vieram da célula j .

Observação 2.4. Note que, por ter apenas um tipo de célula e um tipo de seta, a matriz de adjacência de uma rede regular coincide com a matriz de tipos da Seção 1.7.2.1 contabilizando apenas setas. As entradas de A são números inteiros não-negativos e, em particular, a regularidade implica que as linhas de A tenham soma constante e igual à valência da rede.

Definição 2.5. Uma rede é dita *bidirecional* quando todos os seus acoplamentos entre células se manifestam em pares de setas com sentidos opostos. Dito de outro modo, uma rede é bidirecional quando apresenta matriz de adjacência simétrica.

2.1.1 Quocientes e Levantamentos de Redes Regulares Bidirecionais

Nesta seção, seguimos [2] para caracterizar quocientes e levantamentos de redes regulares bidirecionais como a ilustrada na Figura 2.1 (centro). Em particular, identificamos os quocientes e levantamentos de redes bidirecionais que também são bidirecionais.

Teorema 2.6 ([2, Teorema 4.1]). *Uma rede $Q = \mathcal{G} / \bowtie$ de m células é uma rede quociente de uma rede bidirecional de n células \mathcal{G} por uma relação de equivalência balanceada \bowtie se, e somente se, as entradas da matriz de adjacência $A_Q = [q_{ij}]_{m \times m}$ de Q satisfazem a seguinte condição: existem inteiros positivos k_1, \dots, k_m somando n tais que $k_i q_{ij} = k_j q_{ji}$.*

Demonstração. Seja \mathcal{G} uma rede bidirecional de n células. Disso, temos que a matriz de adjacência de \mathcal{G} é uma matriz simétrica de ordem n . Considere uma relação de equivalência balanceada \bowtie em seu conjunto de células \mathcal{C} e a rede quociente correspondente Q com matriz de adjacência $A_Q = [q_{ij}]_{m \times m}$. Seja $\mathcal{I}_i = \{i_1, \dots, i_{k_i}\}$ e $\mathcal{I}_j = \{j_1, \dots, j_{k_j}\}$ duas classes de \bowtie -equivalência. Como a relação é balanceada, segue que o número de setas das células da classe \mathcal{I}_j para cada célula da classe \mathcal{I}_i é a constante q_{ij} . Assim, o número total de setas das células de \mathcal{I}_j para células de \mathcal{I}_i é então $k_j q_{ij}$. Além disso, como \mathcal{G} é bidirecional, todas essas setas são bidirecionais. Segue daí que o número total de setas das células da classe \mathcal{I}_i para células da classe \mathcal{I}_j , que são $k_i q_{ji}$, satisfazem

$$k_i q_{ij} = k_j q_{ji}.$$

Por outro lado, seja Q uma rede com matriz de adjacência $A_Q = [q_{ij}]_{m \times m}$ de modo que hajam números inteiros positivos k_1, \dots, k_m somando $n > m$ e tais que $k_i q_{ij} = k_j q_{ji}$ para todo $i, j = 1, \dots, m$. Construimos uma matriz simétrica A de ordem n a partir da matriz A_Q da seguinte maneira:

- (i) Considere A formada por blocos Q_{ij} de dimensões $m \times m$, com $1 \leq i, j \leq m$.
- (ii) Para i e j tais que $i \leq j$, defina a submatriz Q_{ij} de A como uma matriz de ordem $k_i \times k_j$ com soma de linhas q_{ij} e soma de colunas q_{ji} . Se $i = j$, a submatriz Q_{ii} também deve satisfazer $Q_{ii} = Q_{ii}^T$.
- (iii) Para $j < i$, defina a submatriz $Q_{ji} = Q_{ij}^T$.

Segue então que A é simétrica. Seja \mathcal{G} a rede com o conjunto de células $\mathcal{C} = \{1, \dots, n\}$ e matriz de adjacência A . Temos então que \mathcal{G} é bidirecional. Além disso, por construção a relação de equivalência \bowtie no conjunto de células de \mathcal{G} com classes $\mathcal{I}_1 = \{1, \dots, k_1\}$, $\mathcal{I}_2 = \{k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2\}$, \dots , $\mathcal{I}_m = \{k_{m-1} + 1, \dots, k_m\}$, é balanceada e Q é a rede quociente de \mathcal{G} por \bowtie . Ou seja, a rede \mathcal{G} é um levantamento bidirecional da rede Q . \square

Corolário 2.7 ([2, Corolário 4.5]). *Seja Q uma rede conexa de m células com matriz de adjacência $A_Q = [q_{ij}]_{m \times m}$ tal que existem inteiros positivos k_1, \dots, k_m somando $n > m$ com*

$k_i q_{ij} = k_j q_{ji}$. Se k_1, \dots, k_m são primos entre si, então os levantamentos bidirecionais de Q com o número mínimo de células tem $n = \sum_{i=1}^m k_i$ células.

Demonstração. A demonstração segue da prova do Teorema 2.6. Como Q é conexa, temos $k_i \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, m$ e assim, se (k_1, \dots, k_m) é a única solução do sistema de equações $k_i q_{ij} = k_j q_{ji}$ com k_1, \dots, k_m primos entre si. Podemos concluir que se $n = \sum_{i=1}^m k_i$, então não pode haver levantamento bidirecional de Q com p células tais que $m < p < n$. Do contrário, teríamos que ter $p = \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{d}$ para algum inteiro $d > 1$, o que é impossível quando k_1, \dots, k_m são primos entre si. \square



Figura 2.2: Rede Q de 3 células com matriz de adjacência A_Q que não é bidirecional mas suporta levantamentos bidirecionais \mathcal{G} tais que $Q = \mathcal{G} / \bowtie$ para alguma relação balanceada \bowtie .

Exemplo 2.8. Considere a rede Q exibida na Figura 2.2 com sua matriz de adjacência A_Q . As entradas de A_Q satisfazem $q_{12} = 3q_{21}$, $q_{13} = 2q_{31}$ e $3q_{23} = 2q_{32}$, ou seja, essa matriz satisfaz a hipótese do Teorema 2.6 para $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 2$. Desse modo, do Teorema 2.6 a rede Q é uma rede quociente de uma rede bidirecional \mathcal{G} por alguma relação de equivalência balanceada do conjunto de células de \mathcal{G} . Além disso, o Corolário 2.7 nos diz que o número mínimo de células de seus levantamentos bidirecionais é 6. De fato, as duas matrizes de adjacência abaixo descrevem tais redes com 6 células:

$$\left[\begin{array}{c|ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c|ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Como ilustrado no Exemplo 2.8, dada uma rede bidirecional \mathcal{G} e uma relação de equivalência balanceada \bowtie no seu conjunto de células, o quociente $Q = \mathcal{G} / \bowtie$ pode não ser uma rede bidirecional. O resultado a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para tal.

Teorema 2.9 ([2, Teorema 4.7]). *Seja Q uma rede quociente de m células de uma rede bidirecional de n células \mathcal{G} associada a uma relação de equivalência balanceada \bowtie . A rede quociente Q é bidirecional se, e somente se, para cada par de células conexas em Q , as \bowtie -classes correspondentes no conjunto de células de \mathcal{G} têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Seja \mathcal{G} uma rede bidirecional de n células e Q uma rede quociente de m células de \mathcal{G} associada a uma relação de equivalência balanceada \bowtie com as classes \mathcal{I}_i para $i = 1, \dots, m$. Denotamos a cardinalidade da classe \mathcal{I}_i por k_i , para $i = 1, \dots, m$ de modo que a soma de k_1, \dots, k_m é n . Tome a matriz de adjacência $A_Q = [q_{ij}]$ de Q de acordo com a primeira parte da prova do Teorema 2.6. Assim, os números inteiros positivos k_1, \dots, k_m satisfazem $k_i q_{ij} = k_j q_{ji}$. Em particular, temos $q_{ij} = 0$ se, e somente se, $q_{ji} = 0$. Tome i, j de modo que $i \neq j$ e $q_{ij} \neq 0$. Se $q_{ij} = q_{ji}$ e $k_i q_{ij} = k_j q_{ji}$, então $k_i = k_j$, ou seja, as classes \mathcal{I}_i e \mathcal{I}_j têm a mesma cardinalidade. Por outro lado, se $k_i = k_j$ e $k_i q_{ij} = k_j q_{ji}$, então $q_{ij} = q_{ji}$. Deste modo, A_Q é simétrica se, e somente se, para cada par de células i, j de Q que estiverem conectadas, ou seja, tais que $q_{ij} \neq 0$, as classes \mathcal{I}_i e \mathcal{I}_j têm a mesma cardinalidade. \square

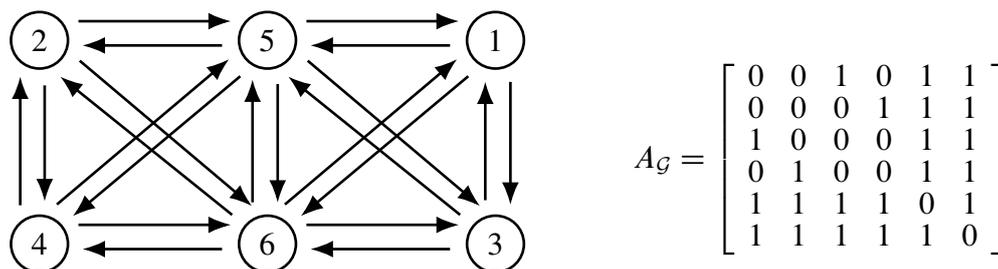


Figura 2.3: Uma rede bidirecional de 6 células com sua matriz de adjacência A_G e que admite um quociente bidirecional.

Exemplo 2.10. Considere a rede \mathcal{G} da Figura 2.3 e as seguintes relações balanceadas: $\bowtie_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ e $\bowtie_2 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}\}$. Para cada relação, há conexões entre células de qualquer classe para células das outras classes. Como a cardinalidade de todas as \bowtie_1 -classes é a mesma, o Teorema 2.9 nos diz que a rede quociente correspondente $Q_1 = \mathcal{G}/\bowtie_1$ deve ser bidirecional enquanto a rede $Q_2 = \mathcal{G}/\bowtie_2$ não é. Isso fica evidente na Figura 2.4.

A relevância de redes bidirecionais será abordada no Capítulo 3.

2.2 Bifurcações de Codimensão Um

Seja \mathcal{G} uma rede de n células e fixe um espaço de fase $P = (\mathbb{R}^k)^n$. Seja $F : P \times \mathbb{R} \rightarrow P$ uma família suave de campos vetoriais \mathcal{G} -admissíveis em P com parâmetro λ , e assumamos a EDO

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda), \quad X \in \mathbb{R}^{kn}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Uma *bifurcação* ocorre quando a topologia do conjunto de soluções (em particular, o número de soluções) muda próxima a algum valor λ_0 de (2.2), conhecido como *ponto de bifurcação*.

Em \mathcal{G} , a polidiagonal $\Delta_0 = \{(x, \dots, x) \in (\mathbb{R}^k)^n\}$ consiste de pontos onde as coordenadas em cada célula são sempre *fluxo-invariantes* por regularidade, de modo que o sistema (2.2) pode ter um equilíbrio (completamente) síncrono $x_0 \in \Delta_0$, onde $F(x_0, \lambda) = 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir após uma mudança de variáveis adequada, que tal equilíbrio está na origem, pois este é um difeomorfismo fortemente admissível [52, Seção 6].

Considere a *linearização* de (2.2) na origem dada pela matriz Jacobiana $J = (dF)_0$ e sejam $v_j = u_j + iw_j$ os autovetores generalizados de J associados a autovalores $\mu_j = \lambda_j + i\delta_j$.

Definição 2.11. O *espaço de Lyapunov* de λ_m é dado por $E(\lambda_m) = \bigoplus E_{\mu_j}$, com soma direta sobre todos os autoespaços generalizados reais associados a autovalores com $\text{Re}(\mu_j) = \lambda_m$.

Definição 2.12. Os *subespaços estável, central e instável* de J são, respectivamente:

- $E^- = \bigoplus \{E(\lambda_m) \mid \lambda_j < 0\} = \text{span}\{u_j, w_j \mid \text{Re}(\mu_j) < 0\}$
- $E^c = \bigoplus \{E(\lambda_m) \mid \lambda_j = 0\} = \text{span}\{u_j, w_j \mid \text{Re}(\mu_j) = 0\}$
- $E^+ = \bigoplus \{E(\lambda_m) \mid \lambda_j > 0\} = \text{span}\{u_j, w_j \mid \text{Re}(\mu_j) > 0\}$.

Para um resumo sobre autoespaços generalizados, veja a Seção A.1 do Apêndice A. Daqui em diante, consideraremos apenas E^c , em especial a restrição $J|_{E^c}$ para abordar bifurcações locais de codimensão um que podem ocorrer em redes regulares.

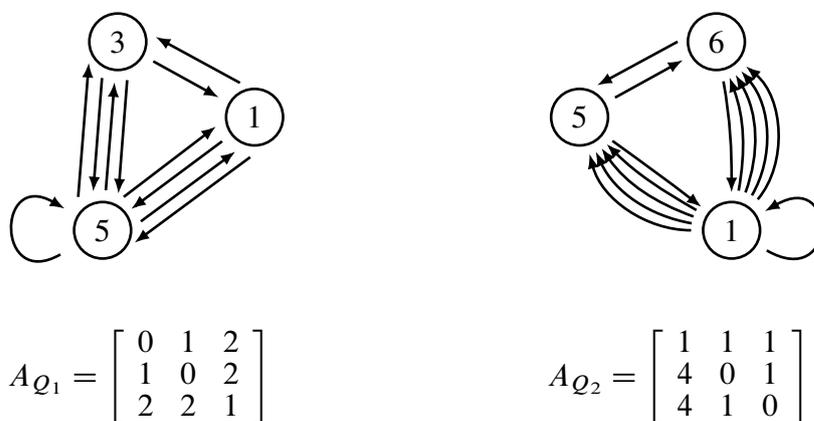


Figura 2.4: *Esquerda:* Representação da rede quociente Q_1 com sua matriz de adjacência simétrica. *Direita:* Rede quociente Q_2 com sua matriz de adjacência.

Definição 2.13. A *codimensão* de uma bifurcação é o número mínimo de parâmetros necessários para produzir a bifurcação em questão.

A teoria padrão de sistemas dinâmicos para bifurcação local (ver Golubitsky e Schaeffer [43, Capítulo IV] e Guckenheimer e Holmes [54]) conta a codimensão pelo número de degenerescências que devem ser satisfeitas para que uma dada singularidade ocorra. Deste ponto de vista (onde nenhum parâmetro distinto de bifurcação está presente), as bifurcações que abordaremos têm codimensão um. Singularidades de codimensão dois ocorrem através de uma degeneração em termos de ordem superior ou através de uma segunda degeneração linear.

Bifurcações de codimensão um dividem-se em *estacionárias* ($J|_{E^c}$ tem um autovalor nulo) e *bifurcações de Hopf* ($J|_{E^c}$ tem autovalores puramente imaginários). Cada um desses tipos de bifurcações divide-se em *preservação de sincronia* ($E^c \subset \Delta_0$) e *quebra de sincronia* ($E^c \not\subset \Delta_0$).

Em redes homogêneas, observe que a classe de campos vetoriais admissíveis restrita a Δ_0 coincide com o conjunto de todos os campos vetoriais em Δ_0 , o que simplifica a estrutura de bifurcações de preservação de sincronia com codimensão um. Como a restrição de F a Δ_0 é o campo vetorial geral em Δ_0 , a única bifurcação estacionária de preservação de sincronia com codimensão um é uma bifurcação sela-nó enquanto a única bifurcação de Hopf de preservação de sincronia com codimensão um é uma bifurcação de Hopf com autovalor simples padrão. Os novos estados estacionários e soluções periódicas que surgem dessas bifurcações são soluções síncronas por estrutura [63].

Partindo disso, no restante deste capítulo focaremos na estrutura de bifurcações de quebra de sincronia de um equilíbrio e a relação desta com a arquitetura da rede.

2.2.1 Subespaços Centrais em Redes Regulares

Nesta seção, discutiremos a estrutura genérica dos autoespaços críticos de redes regulares. Fixamos uma rede regular com r células e, como antes, suponha que um campo vetorial admissível F tenha um equilíbrio síncrono na origem; isso é, $F(0) = 0$. Suponha que a dinâmica interna de cada célula tenha dimensão $k = 1$. Então

$$(dF)_0 = \alpha I + \beta A,$$

onde A é a matriz de adjacência. Todo autovalor de $J = (dF)_0$ tem a forma $\alpha + \beta\mu$, onde μ é um autovalor de A . Segue-se também que os autoespaços generalizados de J são espaços próprios generalizados de A . Nesta seção, provaremos que, genericamente os subespaços centrais em bifurcações de quebra de sincronia são isomórficos às partes reais dos autoespaços generalizados

de A , mas essa conclusão é válida em geral somente quando $k > 1$.

Observação 2.14. Suponha que $k = 1$. Então as partes reais dos autovalores de J são apenas $\alpha + \text{Re}(\mu_j)\beta$. Portanto, se dois dos autovalores de A tiverem a mesma parte real, digamos $\text{Re}(\mu_1) = \text{Re}(\mu_2)$, então as partes reais de $\alpha + (\mu_1)\beta$ e $\alpha + (\mu_2)\beta$ vão assim coincidir para todos os α e β . Como exemplo, considere a rede de 4 células mostrada ao lado de sua matriz de adjacência na Figura 2.5. Os autovalores de A são $2, 0, \pm i$. Numa bifurcação estacionária de quebra de sincronia com codimensão um, o subespaço central é tridimensional dada pela soma direta dos autoespaços correspondendo aos autovalores 0 e $\pm i$.



Figura 2.5: Rede de 4 células cuja matriz de adjacência A tem autovalores $2, 0, \pm i$.

Observação 2.15. Toda forma de Jordan associada a um autovalor 0 pode ser a forma de Jordan de um autovalor real da matriz de adjacência de uma rede regular. Por exemplo, suponha que tenhamos J como na Figura 2.6. Então um exemplo de rede cuja matriz de adjacência tem a forma normal J (correspondendo ao autovalor 0) é mostrada ao lado. Vemos que no caso geral sempre podemos escolher a rede sendo uma ramificação de subredes de alimentação direta.

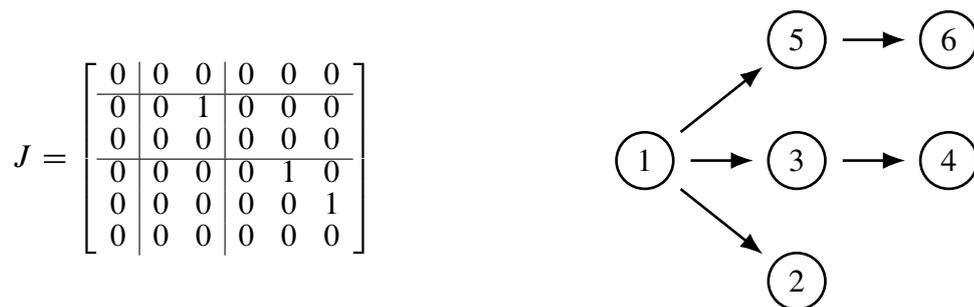


Figura 2.6: Rede de alimentação direta ramificada que pode exibir a forma de Jordan degenerada J em uma bifurcação de codimensão 1 a partir de um equilíbrio síncrono.

Definição 2.16. Sejam $B \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ e $C \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$. O produto tensorial ou produto de Kronecker de B e C é a matriz de dimensão $(\alpha\gamma \times \beta\delta)$, definida por

$$B \otimes C = \begin{bmatrix} b_{11}C & b_{12}C & \cdots & b_{1\beta}C \\ b_{21}C & b_{22}C & \cdots & b_{2\beta}C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\alpha 1}C & b_{\alpha 2}C & \cdots & b_{\alpha\beta}C \end{bmatrix}$$

Em geral $B \otimes C \neq C \otimes B$. Para mais propriedades, veja a Seção A.2 do Apêndice A.

A seguir assumamos que a dinâmica interna de cada célula é k -dimensional com $k > 1$. Num estado totalmente síncrono, a matriz Jacobiana pode ser descrita por duas matrizes de ordem k : a dinâmica interna linearizada Φ e o acoplamento linearizado Ψ de onde temos

$$(dF)_0 = \mathbf{I}_r \otimes \Phi + A \otimes \Psi. \quad (2.3)$$

Para ver isso, primeiro considere a linearização quando a matriz de acoplamento Ψ é zero. Então a linearização tem a forma $\mathbf{I}_r \otimes \Phi$ com r sendo a quantidade de células na rede que fixamos no início desta seção como em [63]. Suponha que a dinâmica interna linearizada Φ seja zero para obter o segundo termo. Novamente, isso ocorre como em [63].

Sejam μ_1, \dots, μ_s os autovalores distintos de A . Além disso, seja

$$M_{\mu_i} = \Phi + \mu_i \Psi. \quad (2.4)$$

Lema 2.17 ([40, Lema 2.3]). *Os kr autovalores da matriz Jacobiana J são a união dos autovalores das matrizes M_{μ_j} para $1 \leq j \leq s$. Especificamente, suponha que $u \in \mathbb{C}^r$ é um autovetor de A . Então*

$$J(u \otimes v) = u \otimes (M_{\mu} v). \quad (2.5)$$

Portanto, se $v \in \mathbb{C}^k$ é um autovetor de M_{μ} , então $u \otimes v$ é um autovetor de J .

Demonstração. Suponha que $\mu \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A com autovetor $u \in \mathbb{C}^r$. Seja

$$Y_u = \{u \otimes v \mid v \in \mathbb{C}^k\} \subset \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^k.$$

Afirmamos que o subespaço Y_u é J -invariante e que $J|_{Y_u} = M_{\mu}$. Daí segue que os k autovalores de $J|_{Y_u}$ são autovalores de J . Para verificar isso, calculamos

$$\begin{aligned} J(u \otimes v) &= u \otimes (\Phi v) + Au \otimes (\Psi v) \\ &= u \otimes (\Phi v) + \mu u \otimes (\Psi v) \\ &= u \otimes ([\Phi + \mu \Psi]v) \\ &= u \otimes (M_{\mu} v), \end{aligned}$$

assim verificando (2.5). Especificamente, $J|_{Y_u}$ é a matriz M_μ . O fato de $u \otimes v$ ser um autovetor de J sempre que v é um autovetor de M_μ segue diretamente de (2.5). \square

Nosso objetivo é classificar os subespaços centrais que ocorrem em bifurcações de codimensão um de redes regulares. Sejam

$$\rho_1, \dots, \rho_p \quad \text{e} \quad \eta_1, \dots, \eta_q \quad (2.6)$$

os autovalores distintos de A , onde ρ_j denota um autovalor real distinto e η_i denota um autovalor complexo distinto de A cujas partes imaginárias são positivas.

Definição 2.18. Um par (Φ, Ψ) de matrizes reais de ordem k é um *par de codimensão um* se as partes reais dos autovalores das matrizes $M_{\rho_1}, \dots, M_{\rho_p}, M_{\eta_1}, \dots, M_{\eta_q}$ são distintas (exceto por conjugados complexos dos autovalores de M_{η_i}). O conjunto desses pares é denotado por $\mathcal{L}_2(k)$.

Não é muito difícil ver que $\mathcal{L}_2(k)$ é um conjunto aberto de $\mathcal{M}(k)^2$, onde $\mathcal{M}(k)$ é o espaço das matrizes reais de ordem k . Como autovalores são raízes do polinômio característico e raízes são funções contínuas dos coeficientes, então, para $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{L}_2(k)$, um par de matrizes (Φ', Ψ') suficientemente próximo ainda produzirá matrizes M'_{μ_i} cujos autovalores têm partes reais distintas. Na Proposição 2.19 provamos que, quando $k > 1$, o conjunto $\mathcal{L}_2(k)$ também é um subconjunto denso. Portanto, a bifurcação genérica de codimensão um ocorrerá com uma Jacobiana J associada a um par de codimensão um e J terá um subespaço central correspondente a um autovalor crítico.

Proposição 2.19 ([40, Proposição 2.5]). *Para $k > 1$, $\mathcal{L}_2(k) \subset \mathcal{M}(k)^2$ é um conjunto aberto e denso. Para $k = 1$, $\mathcal{L}_2(k)$ é aberto e denso quando os autovalores de A em (2.6) têm partes reais distintas.*

O segundo resultado relevante desta seção estabelece que dentro do corpo dos números complexos, genericamente o autoespaço generalizado da matriz Jacobiana J é isomorfo a um autoespaço generalizado da matriz de adjacência A . Começamos com um lema direto.

Lema 2.20 ([40, Lema 2.6]). *Seja $\mu \in \mathbb{C}$ um autovalor de A e denote por $E_\mu(A)$ o autoespaço generalizado complexo associado. Então, $E_\mu(A) \otimes \mathbb{C}^k$ é invariante por J .*

Demonstração. Seja $A_\mu = A - \mu \mathbf{I}$ e escrevemos

$$J = \mathbf{I}_r \otimes \Phi + A \otimes \Psi = \mathbf{I}_r \otimes M_\mu + A_\mu \otimes \Psi.$$

Como ambos os membros deixam $E_\mu(A) \otimes \mathbb{C}^k$ invariante, então J também deixa. \square

Seja $\xi \in \mathbb{C}$ um autovalor de J e denote por $E_\xi(J)$ o autoespaço generalizado de $J_\xi = J - \xi \mathbf{I}$ restrito ao subespaço invariante $E_\mu(A) \otimes \mathbb{C}^k$.

A Proposição 2.19 nos permite assumir que todos os autovalores de M_μ são simples e têm partes reais distintas. Segue que a cada μ há uma base de autovetores u_1, \dots, u_k de M_μ em \mathbb{C}^k .

Para o próximo teorema, devemos impor suposições adicionais à matriz de acoplamento Ψ da seguinte maneira: para cada autovalor ξ de M_μ com autovetor associado u escreva

$$\Psi u = \sum_j \zeta_j u_j. \quad (2.7)$$

Assuma que todos os $\zeta_j \neq 0$ para $j = 1, \dots, k$. (2.8)

Observe que o conjunto de Ψ 's que satisfaz (2.7), (2.8) para um ξ fixo é aberto e denso. Como há um número finito de ξ 's, o conjunto de Ψ 's que satisfaz (2.7), (2.8) para todo ξ também é aberto e denso.

Teorema 2.21 ([40, Teorema 2.7]). *Assuma (2.7), (2.8). Seja $\mu \in \mathbb{C}$ um autovalor de A e seja $\xi \in \mathbb{C}$ um autovalor simples de M_μ . Então existe um isomorfismo*

$$\varphi : E_\mu(A) \rightarrow E_\mu(J)$$

tal que em $E_\mu(A)$

$$J_\xi \circ \varphi = \varphi \circ A_\mu. \quad (2.9)$$

Observação 2.22. A Proposição 2.19 e o Teorema 2.21 fornecem uma analogia entre as bifurcações de quebra de sincronia em redes regulares e as bifurcações de quebra de simetria na teoria equivariante; no entanto, para ver essa analogia claramente, devemos discutir os subespaços centrais da real jacobiana J , não apenas os autoespaços da complexificação de J . Nesta analogia, os subespaços centrais de J associados aos autovalores reais de A correspondem a representações absolutamente irredutíveis enquanto os subespaços centrais de J associados aos autovalores complexos de A correspondem a representações não absolutamente irredutíveis.

A Proposição 2.19 implica que, genericamente, em uma bifurcação de quebra de sincronia, o subespaço central de J é determinado pelo autoespaço correspondente a um autovalor μ de A e um autovalor crítico simples ξ de M_μ . Segue-se, como explicamos a seguir, que os subespaços centrais de J e, portanto, as bifurcações de quebra de sincronia da codimensão 1, se dividem em três tipos, que são descritos melhor considerando-se separadamente os casos em que μ é real e quando μ não é real.

- (a) $\mu \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a matriz M_μ é uma matriz real $k \times k$ arbitrária. Como J varia com um parâmetro, o mesmo ocorre com M_μ , e um valor próprio crítico ξ de M_μ é 0 ou puramente imaginário. Suponha que $\xi = 0$. Nesse caso, todas as construções no Teorema 2.21 são reais, e os subespaços reais $E_\mu(A)$ e $E_0(J)$ são isomórficos. Portanto, $E^c(J) \cong E_\mu(A)$.
- (b) Suponha agora que ξ seja puramente imaginário. O Teorema 2.21 afirma que o espaço vetorial complexo $E_\xi(J)$ e a complexificação de $E_\mu(A)$ são isomórficos. No entanto, o fato de M_μ ser uma matriz real implica que ξ também é um autovalor crítico de M_μ . Como o subespaço central $E^c(J)$ é a parte real de $E_\xi(J) \oplus E_{\bar{\xi}}(J)$, segue que $E^c(J) \cong E_\mu(A) \oplus E_\mu(A)$.
- (c) $\mu \notin \mathbb{R}$. Nesse caso, a matriz M_μ é uma matriz complexa arbitrária $k \times k$. Como J varia com um parâmetro, o mesmo ocorre com M_μ , e um autovalor crítico ξ de M_μ é genericamente puramente imaginário. Observe, no entanto, que $\bar{\xi}$ genericamente não é um autovalor de M_μ , embora seja sempre um autovalor de $M_{\bar{\mu}}$. Portanto, $E^c(J) \cong \text{Re}(E_\mu(A) \oplus E_\mu(A))$.

Na teoria de bifurcação Γ -equivariante, as bifurcações em estado estacionário correspondem a representações absolutamente irredutíveis, e as bifurcações de Hopf correspondem a representações Γ -simples (ver [51]). Lembrando que as representações Γ -simples são a soma direta de duas cópias de uma representação absolutamente irredutível ou uma única cópia de uma representação não absolutamente irredutível. Como vimos, genericamente pode haver bifurcações de estado estacionário e de Hopf com quebra de sincronia em redes regulares que correspondem a autovalores reais de A e bifurcações de Hopf que correspondem a autovalores complexos de A .

Como consequência imediata da Observação 2.22, temos a seguinte caracterização de subespaços centrais para bifurcações de codimensão um em redes regulares.

Corolário 2.23 ([40, Corolário 2.10]). *Genericamente em (Φ, Ψ) , o subespaço central $E^c(J)$ em uma bifurcação de estado estacionário em uma rede regular é isomórfico a $E_\mu(A)$ para algum autovalor real μ de A . Em uma bifurcação de Hopf, $E^c(J)$ é isomórfico a $E_\mu(A) \oplus E_\mu(A)$ se $\mu \in \mathbb{R}$ ou para $\text{Re}(E_\mu(A) \oplus E_\mu(A))$ se $\mu \notin \mathbb{R}$.*

Notamos novamente a analogia entre a classificação fornecida pelo Corolário 2.23 e a classificação das bifurcações equivariantes. Agora passamos à demonstração desses resultados.

Demonstração da Proposição 2.19. Para provar a proposição, devemos estabelecer que um determinado número finito de conjuntos nos pares (Φ, Ψ) seja aberto e denso. A interseção desses conjuntos será aberta e densa e conterá os pares de matrizes desejados.

Para começar, tome dois autovalores $\lambda_\phi, \lambda_\psi$ de A a partir do conjunto (2.6) e considere os dois conjuntos de pares de matrizes Φ, Ψ :

$$\begin{aligned} D_\phi &= \{(\Phi, \Psi) \in \mathcal{M}(k)^2 \mid M_{\lambda_\phi} \text{ tem autovalores com partes reais distintas}\}, \\ E_{\phi,\psi} &= \{(\Phi, \Psi) \in D_\phi \cap D_\psi \mid M_{\lambda_\phi}, M_{\lambda_\psi} \text{ tem autovalores com partes reais distintas}\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Observe que os conjuntos D_ϕ e $E_{\phi,\psi}$ são abertos e que $\mathcal{L}_2(k)$ consiste em matrizes na interseção dos conjuntos $E_{\phi,\psi}$. Além disso, se os conjuntos D_ϕ são densos em $\mathcal{M}(k)^2$, então provar que $E_{\phi,\psi}$ é denso em $D_\phi \cap D_\psi$ é suficiente para provar que $E_{\phi,\psi}$ é denso em $\mathcal{M}(k)^2$.

Do ponto de vista dessa proposição, os autovalores distintos da matriz de adjacência A em (2.6) apenas formam um conjunto finito de números reais e complexos. Esse conjunto pode ser deslocado por qualquer número real c , pois

$$M_\mu = (\Phi + c\Psi) + (\mu - c)\Psi.$$

Segue que os conjuntos em (tal) são abertos e densos para $\lambda_\phi, \lambda_\psi$ se, e somente se, estes são abertos e densos no conjunto $\lambda_\phi - c, \lambda_\psi - c$. Da mesma forma, podemos mover o conjunto de autovalores, pois

$$M_\mu = \Phi + (c\mu) \left(\frac{1}{c} \Psi \right)$$

para qualquer constante real $c \neq 0$.

Assim, quando consideramos os conjuntos D_ϕ , podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\lambda_\phi = 0$ ou $\lambda_\phi = i$. No primeiro caso, $M_{\lambda_\phi} = \Phi$. Usando formas normais de Jordan reais, é fácil mostrar que as pequenas perturbações de ϕ têm autovalores cujas partes reais são distintas. No segundo caso, $M_{\lambda_\phi} = \Phi + i\Psi$, que é uma matriz complexa arbitrária. Agora, usando a base cuja existência é garantida pela forma normal de Jordan complexa, podemos ver que pequenas perturbações de Φ, Ψ moverão, arbitrariamente, as partes reais dos autovalores de M_{λ_ϕ} . Portanto, em todos os casos, D_ϕ é denso.

Para provar a densidade dos conjuntos $E_{\phi,\psi}$, precisamos considerar pares de autovalores λ_ϕ e λ_ψ em (2.6). Esses autovalores têm partes reais distintas ou partes reais iguais. Portanto, podemos deslocar e reescalar esses autovalores para que sejam iguais a um dos pares:

$$\begin{aligned} (\lambda_\phi, \lambda_\psi) & \quad \text{Re}(\lambda_\phi) = 0; \text{Re}(\lambda_\psi) \neq 0, \\ (i, i\omega) & \quad 0 \leq \omega < 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A densidade dos conjuntos $E_{\phi,\psi}$ podem ser explicitada em cada caso. Como Φ, Ψ estão em $D_\phi \cap D_\psi$, as matrizes M_{λ_ϕ} e M_{λ_ψ} têm autovalores distintos e uma base de autovetores.

Caso $\text{Re}(\lambda_\phi) = 0$; $\text{Re}(\lambda_\psi) \neq 0$: Nesse caso, mantemos Ψ fixo e o perturbamos para $\Psi + \varepsilon \mathbf{I}_k$. Essa perturbação desloca os autovalores de M_{λ_ϕ} por $\varepsilon \lambda_\phi$, o qual é puramente imaginário; portanto, a perturbação mantém fixas as partes reais dos autovalores dessa matriz. Essa perturbação também altera os valores próprios de M_{λ_ψ} por $\varepsilon \lambda_\psi$. Como $\text{Re}(\lambda_\psi) \neq 0$, essa perturbação desloca as partes reais dos valores próprios por $\varepsilon \text{Re}(\lambda_\psi)$. Assim, os conjuntos E_{i,λ_ψ} são densos.

Caso $\lambda_\phi = i$; $\lambda_\psi = i\omega$; $0 \leq \omega < 1$: Quando $k = 1$, as partes reais dos autovalores de M_{λ_ϕ} e M_{λ_ψ} são sempre iguais e a separação das partes reais dos autovalores é impossível. Portanto, assumimos $k \geq 2$.

A matriz $M_{\lambda_\phi} = \Phi + i\Psi$ é uma matriz complexa arbitrária. Podemos assumir, como acima, que os autovalores de M_{λ_ϕ} são distintos e, por uma perturbação arbitrariamente pequena, que esses autovalores são todos complexos. Fixe um autovalor η_ϕ de M_{λ_ϕ} com o autovetor $y = y_{Re} + iy_{Im}$. Também podemos assumir, após uma perturbação arbitrariamente pequena, que y_{Re} e y_{Im} são linearmente independentes, de modo que o subespaço $Y = \text{span}_{\mathbb{R}}\{y_{Re}, y_{Im}\}$ é 2-dimensional. Seja $P + iQ$ uma matriz de perturbação para o qual

$$(P + iQ)y = 0. \quad (2.12)$$

Observe que $(M_{\lambda_\phi} + (P + iQ))y = \eta_\phi y$. Portanto, a parte real do autovalor perturbado de $M_{\lambda_\phi} + (P + iQ)$ é a mesma que a parte real do autovalor η_ϕ de M_{λ_ϕ} . Em seguida, assumamos que $M_{\lambda_\psi} = \Phi + i\omega\Psi$ (onde $\omega \neq 1$) tem um autovalor η_ψ com o autovetor $z = z_{Re} + iz_{Im}$ e $\text{Re}(\eta_\phi) = \text{Re}(\eta_\psi)$. Suponha que p, q também satisfaçam

$$(P + i\omega Q)z = \varepsilon z. \quad (2.13)$$

para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}$ não-nulo. A equação (2.13) implica que a parte real do autovalor de $M_{\lambda_\psi} + P + i\omega Q$ associada ao autovetor z é $\eta_\psi + \varepsilon$. Assim, os conjuntos $E_{i,\omega i}$ são densos se as restrições de perturbação (2.12) e (2.13) ocorrerem simultaneamente.

Assuma que P é invertível e seja $B = P^{-1}Q$. Então (2.12) pode ser escrita como

$$(\mathbf{I} + iB)y = 0$$

ou como $By = iy$. Como y_{Re} e y_{Im} são linearmente independentes, podemos escolher B para satisfazer $By_{Re} = -y_{Im}$ e $By_{Im} = y_{Re}$. Observe que os autovalores de B em Y são $\pm i$. Segue que podemos escolher B de modo que $\mathbf{I} + i\omega B$ seja invertível (ambos dentro e fora de Y), pois $\omega \neq \pm 1$. Em seguida, observe que (2.13) reduz para

$$P^{-1}z = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{I} + i\omega B)z.$$

Como $\mathbf{I} + i\omega B$ é invertível, podemos escolher um P invertível para satisfazer essa equação. Então definimos $Q = PB$.

Observe que o único momento em que precisamos assumir $k > 1$ foi no segundo caso, o caso em que dois autovalores da matriz de adjacência A têm partes reais iguais. \square

Demonstração do Teorema 2.21. A Proposição 2.19 nos permite assumir que todos os autovalores de M_μ são simples e têm partes reais distintas. Então, para cada μ existe uma base de autovetores u_1, \dots, u_k de M_μ em \mathbb{C}^k . Pelas suposições (2.7) e (2.8), assumimos que todos os ζ_j são diferentes de zero.

Para o resto da demonstração, fixamos o autovalor μ . Seja ξ um autovalor de M_μ e, portanto, um autovalor de J . Seja $E_\xi(J) \subset E_\mu(A) \otimes \mathbb{C}^k$ o autoespaço generalizado correspondente ao autovalor ξ de J . Provaremos o teorema construindo o isomorfismo φ .

Na verdade, precisamos apenas mostrar que φ é uma aplicação injetora. Se for o caso, então $\dim E_\xi(J) \geq \dim E_\mu(A)$. De fato, se algum φ não fosse uma sobrejeção, então se seguiria que

$$\sum_{i=1}^k \dim E_{\xi_i}(J) > k \dim E_\mu(A),$$

onde ξ_1, \dots, ξ_k são os autovalores de M_μ . Porém, como

$$E_{\xi_1}(J) \oplus \dots \oplus E_{\xi_k}(J) = E_\mu(A) \otimes \mathbb{C}^k,$$

segue que

$$\sum_{i=1}^k \dim E_{\xi_i}(J) = k \dim E_\mu(A).$$

Portanto, φ deve ser tanto sobrejetiva quanto injetiva. Observe que, como consequência da contagem de dimensões, também provamos que todos os autovalores de J são os que vieram das M_μ 's no Lema 2.20. Como genericamente as partes reais de todos os autovalores ξ são distintas (Proposição 2.19), segue que $E^c = \text{Re}(E_\xi(J))$.

Em seguida, escolhemos uma base em $E_\mu(A)$ para a qual A está na forma de Jordan. Seja

$$E_\mu^j(A) = \ker(A_\mu^j)$$

para $j = 1, \dots, s$, onde s é o menor inteiro para o qual $E_\mu^j(A) = E_\mu(A)$. Seja $\Lambda^1 = E_\mu^1(A)$ o

conjunto dos autovetores de A com autovalor μ e escolha subespaços P^j para $j = 2, \dots, s$ de modo que

$$E_\mu^j(A) = E_\mu^{j-1}(A) \oplus \Lambda^j.$$

Seja $d_j = \dim \Lambda^j$ e note que $d_s \leq \dots \leq d_1$. Além disso, podemos escolher bases $\{v_{j,1}, \dots, v_{j,d_j}\}$ de Λ^j de modo que

$$A_\mu(v_{j,m}) = v_{j-1,m}.$$

Definimos φ nos blocos de Jordan de A restritos a $E_\mu(A)$. Mais precisamente, cada cadeia de autovetores generalizados $\{v_{1,m}, v_{2,m}, \dots, v_{\ell,m}\}$ (onde $d_{\ell+1} < m$) é uma base para um bloco de Jordan de A . Deste modo, a construção de φ prossegue indutivamente em cada cadeia.

Para simplificar a notação, denote a sequência com subscritos únicos por V_1, \dots, V_ℓ . Afiramos que existem vetores W_1, \dots, W_ℓ em $E_\mu(A) \otimes \mathbb{C}^k$ tais que $W_1 \neq 0$, $J_\xi(W_1) = 0$ e

$$J_\xi(W_j) = W_{j-1}$$

para $2 \leq j \leq \ell \leq s$. Definimos então $\varphi(V_j) = W_j$ e estendemos por linearidade. Por construção, φ satisfaz (2.9). Além disso, o conjunto de W_j assim construído é linearmente independente. Observe que nenhum dos W_j é igual a zero. Em seguida, suponha que

$$W = \rho_1 W_1 + \dots + \rho_s W_s = 0,$$

onde $\rho_j \in \mathbb{C}$. Segue que $J_\xi^{s-1}(W) = \rho_s W_1 = 0$. Assim, $\rho_s = 0$ pois $W_1 \neq 0$. Como $\rho_s = 0$, temos que $J_\xi^{s-2}(W) = \rho_{s-1} W_1 = 0$, ou seja, $\rho_{s-1} = 0$ e assim, sucessivamente.

Também é simples mostrar que a união dos vetores W_j que vêm de todas as cadeias diferentes também é linearmente independente. Assim, a aplicação $\varphi : E_\mu(A) \rightarrow E_\mu(J)$ é injetiva. Agora continuamos com a construção do W_j .

Como os autovalores de M_μ são simples, podemos escrever

$$\mathbb{C}^k = S \oplus \text{span}_{\mathbb{C}}\{U\}, \quad (2.14)$$

onde $M_\mu U_1 = \xi U_1$ é um autovetor e S é a soma dos autoespaços correspondentes a outros autovalores além de ξ . Seja $M_{\mu,\xi} = M_\mu - \xi \mathbf{I}_k$. Observe que com $M_{\mu,\xi} : \mathbb{C}^k \rightarrow S$, $M_{\mu,\xi}$ define uma restrição invertível a S .

Seja U um autovetor de M_μ com autovalor ξ . Afiramos que podemos escolher $U_1^j = \gamma_j U$ onde $\gamma_j \in \mathbb{C}$ é não-nulo e $U_2^j, \dots, U_j^j \in S$ de modo que W_j tem a forma

$$W_j = V_j \otimes U_1^j + \dots + V_1 \otimes U_j^j. \quad (2.15)$$

Para começar, defina $W_1 = V_1 \otimes U_1^1 = U$, onde $U_1^1 = U$. Como o vetor V_1 é um autovetor de A com autovalor μ , o Lema 2.17 afirma que $W_1 \neq 0$ é um autovetor de J com autovalor ξ ; isto é, $J_\xi(W_1) = 0$. A seguir, encontramos $\gamma_2 \in \mathbb{C}$, $U_2^2 \in S$ e W_2 . Calculamos

$$\begin{aligned} J_\xi(W_2) &= J_\xi(V_2 \otimes U_1^1 + V_1 \otimes U_2^2) \\ &= V_2 \otimes \gamma_2(M_{\mu,\xi}U) + (A_\mu V_2) \otimes \gamma_2(\Psi U) + V_1 \otimes (M_{\mu,\xi}U_2^2) + (A_\mu V_1) \otimes (\Psi U_2^2) \\ &= V_1 \otimes \gamma_2(\Psi U) + V_1 \otimes (M_{\mu,\xi}U_2^2) \end{aligned}$$

pois $M_{\mu,\xi}U = 0$, $A_\mu V_1 = 0$ e $(A_\mu V_2) = V_1$.

Segue que para resolver $J_\xi(W_2) = W_1 = V_1 \otimes U$ devemos resolver a equação

$$\gamma_2(\Psi U) + (M_{\mu,\xi}U_2^2) - U = 0 \quad (2.16)$$

para $U_2^2 \in \mathbb{C}^k$ e $\gamma_2 \in \mathbb{C}$. Usando a condição de genericidade (2.7), podemos definir $\gamma_2 = \zeta_j^{-1}$, onde u_j é o autovetor em (2.7) que corresponde ao autovalor ξ . Daí (2.16) agora torna-se

$$M_{\mu,\xi}U_2^2 = Q,$$

onde $Q \in S$. Como $M_{\mu,\xi}$ é invertível em S , essa equação pode ser resolvida para $U_2^2 \in S$. Em seguida, assumimos que W_{j-1} foi definido em $E_\mu(A) \otimes \mathbb{C}^k$ para que $J_\xi(W_{j-1}) = W_{j-2}$. Para completar a indução, devemos encontrar $W_j \in E_\mu(A) \otimes \mathbb{C}^k$ e $\gamma_j \in \mathbb{C}$ de modo que $J_\xi(W_j) = W_{j-1}$. Seja W_j como mostrado em (2.15). Calculamos então

$$\begin{aligned} J_\xi(W_j) &= J_\xi(V_j \otimes U_1^1 + \dots + V_1 \otimes U_j^j) \\ &= J_\xi(V_j \otimes U_1^1) + \dots + J_\xi(V_1 \otimes U_j^j) \\ &= V_{j-1} \otimes \gamma_j(\Psi U) + \sum_{p=2}^{j-1} (V_{j+1-p} \otimes (M_{\mu,\xi}U_p^j) + V_{j-p} \otimes (\Psi U_p^j) + V_1 \otimes (M_{\mu,\xi}U_j^j)) \\ &= \sum_{p=1}^{j-1} (V_{j-p} \otimes (\Psi U_p^j + M_{\mu,\xi}U_{p+1}^j)). \end{aligned}$$

Lembramos que W_{j-1} tem a forma

$$W_{j-1} = V_{j-1} \otimes U_1^{j-1} + \dots + V_1 \otimes U_{j-1}^{j-1}, \quad (2.17)$$

onde $U_1^{j-1} = \gamma_{j-1}U$ para algum $\gamma_{j-1} \in \mathbb{C}$.

Deste modo, para encontrar W_j tal que $J_\xi(W_j) = W_{j-1}$, precisamos resolver o sistema de

equações

$$\begin{aligned} (\gamma_j \Psi - \gamma_{j-1})U + M_{\mu, \xi} U_2^j &= 0, \\ \Psi U_2^j - U_2^{j-1} + M_{\mu, \xi} U_3^j &= 0, \\ &\vdots \\ \Psi U_{j-1}^j - U_{j-1}^{j-1} + M_{\mu, \xi} U_j^j &= 0, \end{aligned}$$

Para $U_2^j, \dots, U_j^j \in S$ e $\gamma_j \in \mathbb{C}$.

Como no caso $j = 2$, podemos resolver a primeira equação escolhendo γ_j de modo que $(\gamma_j \Psi - \gamma_{j-1})U \in S$. Em seguida, pode-se inverter $M_{\mu, \xi}$ para resolver $U_2^j \in S$.

As equações restantes têm a forma

$$\begin{aligned} M_{\mu, \xi} U_3^j &= q_3, \\ &\vdots \\ M_{\mu, \xi} U_j^j &= q_j, \end{aligned}$$

onde $q_3, \dots, q_j \in S$ que podem ser resolvidas para $U_3^j, \dots, U_j^j \in S$ pela inversão de $M_{\mu, \xi}$. \square

2.3 Ramificações de Soluções

Nesta seção, provamos um análogo do Lema de Ramificação Equivariante [51] no contexto de sistemas de células regulares.

O subespaço $\Delta = \{(y, \dots, y)\}$ consiste em pontos totalmente síncronos. Suponha que $\dot{x} = F(x, \lambda)$ é um SCA e $(x_0, \lambda_0) \in \Delta$ é um equilíbrio totalmente síncrono em λ_0 ; isto é, $F(x_0, \lambda_0) = 0$. Então (x_0, λ_0) é um *ponto de bifurcação de quebra de sincronia* se

$$K = \ker(dF)_{x_0, \lambda_0} \neq 0 \quad \text{e} \quad K \cap \Delta = \{0\}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\lambda_0 = 0$. Numa bifurcação de quebra de sincronia, $(dF)_{x_0, \lambda_0}|_{\Delta}$ é não-singular. Portanto, o teorema da função implícita garante que exista uma família parametrizada de equilíbrios totalmente síncronos $x(\lambda)$, onde $x(0) = x_0$. Novamente podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x(\lambda) = 0$. Segue-se que $x_0 = 0$ e $F(0, \lambda) = 0$.

Definição 2.24. Uma polidiagonal Δ_κ , correspondente a uma coloração balanceada, é dita *axial* (em K) se $\dim(\Delta_\kappa \cap K) = 1$.

Teorema 2.25 ([40, Teorema 6.3]). *Seja \mathcal{G} uma rede regular e $F(x, \lambda)$ uma família de sistemas \mathcal{G} -admissíveis. Seja (x_0, λ_0) um ponto de bifurcação de quebra de sincronia. Então, genericamente cada polidiagonal axial em K corresponde a um único ramo de zeros de F .*

Demonstração. Vamos mostrar existe um único ramo de zeros de F associado à polidiagonal Δ_κ . Seja $\hat{F} = F|_{\Delta_\kappa}$. Observe que $\hat{F}(0, \lambda) = 0$ e que $(d\hat{F})_{0,0}$ possui um núcleo 1-dimensional igual a $\Delta_\kappa \cap K = \text{span}_{\mathbb{R}}(v)$. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a equação reduzida obtida pela redução de Liapunov-Schmidt de \hat{F} para $\text{span}_{\mathbb{R}}(v)$ [43, Capítulo I e Apêndice 2]. Observe que $G(0, \lambda) = 0$. Portanto, pelo Teorema de Taylor,

$$G(t, \lambda) = tH(t, \lambda).$$

Genericamente, $H(0, 0)$ é não-nulo e o teorema da Função Implícita garante a existência de uma família de soluções para $H(t, \lambda) = 0$ parametrizada por t . \square

Exemplo 2.26. A rede 6 em [63], mostrada na Figura 2.7, fornece um exemplo em que o Teorema 2.25 pode ser aplicado quando 0 é um autovalor múltiplo da matriz de adjacência e, portanto, de dF . A matriz de adjacência com um autovalor zero duplo e um único autovetor associado $v = (1, -1, -1)^T$ é mostrada ao lado.



Figura 2.7: Rede de 3 células com autovalores múltiplos na matriz de adjacência reproduzida de [63].

Observe que a configuração da célula 2 igual à célula 3 leva a uma coloração balanceada e que $\Delta_\kappa \cap K = \text{span}(v)$ é 1-dimensional. Portanto, o Teorema 2.25 implica na existência de uma ramificação de equilíbrios com $x_2 = x_3$. Observamos que [63, Teorema 4.11] também prova a existência de uma ramificação assíncrona de soluções que se origina dessa bifurcação.

Suponha que o sistema de células acopladas tenha um grupo de simetria Γ e suponha que Σ seja um subgrupo axial para a ação de Γ em K . Então, $\text{Fix}_K(\Sigma) = \text{Fix}(\Sigma) \cap K$ é 1-dimensional e o Teorema 2.25 se reduz ao Lema de Ramificação Equivariante.

Exemplo 2.27. A rede de quatro células mostrada na Figura 2.8 mostra que, em princípio, o Teorema 2.25 fornece informações mais refinadas do que o Lema de Ramificação Equivariante.

Para ver isso, observe que a matriz de adjacência dessa rede tem autovetores

$$(1, 1, 1, 1)^T, \quad (1, -1, -1, 1)^T, \quad (0, 0, 1, -1)^T, \quad (0, 0, 1, 1)^T,$$

correspondendo aos autovalores $2, -2, -1, 1$. As bifurcações associadas ao subespaço central correspondente, que são cobertas pelo Teorema 2.25, levam a soluções síncronas.



Figura 2.8: Rede homogênea de 4 células com simetria \mathbb{Z}_2 e sua matriz de adjacência.

O primeiro autovetor leva a uma solução totalmente síncrona enquanto os demais levam a soluções no subespaço de sincronia correspondente às cores balanceadas na Figura 2.9. Observe que o Lema de Ramificação Equivariante discute apenas o padrão de sincronia correspondente ao autovetor $(0, 0, 1, 1)^T$, o qual está associado a $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2)$.

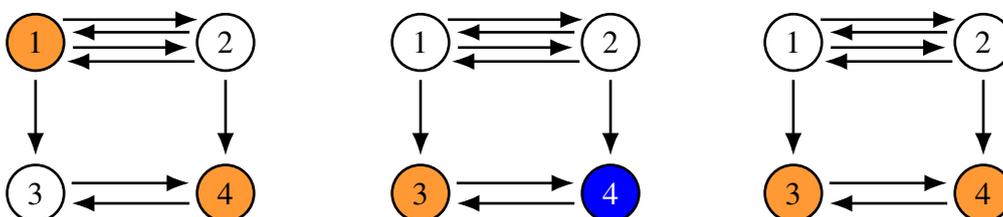


Figura 2.9: Três colorações balanceadas não-trivialis de rede homogênea de 4 células com simetria \mathbb{Z}_2 .

Se a dinâmica interna é unidimensional, o subespaço central correspondente aos autovalores $-1, 1$ não pode ocorrer como a primeira bifurcação. No entanto, se a dinâmica interna 2-dimensional for assumida, uma bifurcação correspondente a cada autovalor de A pode ser a primeira a sofrer bifurcação. Observe que os autovalores de $(dF)_0$ que correspondem aos autovalores $2, -2, -1, 1$ de A são os autovalores das matrizes $\Phi + 2\Psi$, $\Phi - 2\Psi$, $\Phi - \Psi$ e $\Phi + \Psi$, respectivamente. Portanto, para encontrar uma bifurcação associada ao autovalor 1 de A , precisamos encontrar Φ e Ψ para que os seis autovalores das três matrizes $\Phi + 2\Psi$, $\Phi - 2\Psi$, $\Phi - \Psi$ tenham todos parte real negativa e um autovalor de $\Phi + \Psi$ é 0 , enquanto o outro é negativo.

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2,5 & -4,5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes que exemplificam essa propriedade.

Um teorema geral para redes que é análogo ao Teorema de Hopf Equivariante (EHT) [51] (ou seja, uma extensão do Teorema 2.25 considerando $\dim(\Delta_k \cap K) = 2$) é difícil de estabelecer. O ponto principal diz respeito a simetrias espaço-temporais. O EHT usa o fato de que a própria bifurcação de Hopf induz uma ação natural de \mathbb{S}^1 correspondente à mudança de fase e a interação dessa simetria \mathbb{S}^1 com as simetrias espaciais do sistema. No contexto geral de redes, há evidências crescentes de que soluções periódicas com sincronia de deslocamento de fase (rígida) só podem ocorrer se uma rede quociente associada tiver simetria não-trivial. De fato, para redes homogêneas conexas por caminhos, essa simetria pode ser dada por um grupo cíclico (veja o Teorema da Fase Rígida em Golubitsky *et al.* [42] onde essa conjectura é mostrada sem a hipótese de conexidade usando “extensões de simetria” da rede quociente). No entanto, não está claro como estabelecer um análogo interessante do EHT com essa conjectura. Mesmo no contexto especial de simetrias interiores [41], onde o análogo do EHT pode ser facilmente estabelecido, a prova permaneceu evasiva e foi dada apenas em 2008 por Antoneli *et al.* [7].

Dois exemplos ilustram algumas das dificuldades mais simples: o anel unidirecional de três células (Figura 1.3) e a rede de alimentação direta de três células (Figura 1.5).

A bifurcação de Hopf a partir de um equilíbrio síncrono no anel unidirecional pode ocorrer com dinâmica interna unidimensional e leva (devido à simetria \mathbb{Z}_3) a soluções onde quaisquer duas células oscilam um terço de um período fora de fase. É um fato curioso que a bifurcação para oscilação síncrona possa ocorrer apenas quando a dinâmica interna for pelo menos bidimensional ($k > 1$). Esses fatos seguem trivialmente dos subespaços centrais associados à matriz de adjacência,

$$A_{\text{unidir}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Os autovalores de A_{unidir} são $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1 + i\sqrt{3}/2$ e $\bar{\mu}_2$ com autoespaços reais associados

$$V_1 = \text{span}_{\mathbb{R}}(1, 1, 1)^T \quad \text{e} \quad V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}. \quad (2.19)$$

Foi mostrado em [35] que a bifurcação de Hopf com quebra de sincronia na rede de alimentação direta leva a duas ramificações de soluções periódicas. A amplitude das soluções em um ramo cresce na taxa esperada de $\lambda^{\frac{1}{2}}$ (onde λ é o parâmetro de bifurcação) e a amplitude de soluções ao longo do outro ramo cresce na taxa inesperada de $\lambda^{\frac{1}{6}}$. Nem a existência de múltiplas soluções nem a rápida taxa de crescimento se devem à simetria. Em vez disso, devem-se em parte à presença de autovalores repetidos na matriz de adjacência induzidos pela arquitetura da rede.

A matriz de adjacência da rede de alimentação direta é

$$A_{\text{ald}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Os autovalores de A_{ald} são $\eta_1 = 1$ e $\eta_2 = 0$ com multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1. Os autoespaços (generalizados) reais associados são

$$W_1 = \text{span}_{\mathbb{R}}(1, 1, 1)^{\top} \quad \text{e} \quad W_2 = \text{span}((0, 1, 0)^{\top}, (0, 0, 1)^{\top}). \quad (2.21)$$

A estrutura de Jordan não trivial de A_{ald} é responsável pela existência de várias ramificações de solução nas bifurcações de Hopf que quebram a sincronia nesta rede, mas o quadro completo é ainda mais complicado. Elmhirst e Golubitsky [35] mostram que existem outras redes regulares que possuem estruturas de Jordan em suas matrizes de adjacência idênticas às da rede de alimentação direta, mas cujas bifurcações não lineares geram soluções com diferentes multiplicidades e diferentes taxas de crescimento.

Discutiremos na próxima seção o comportamento dessas estruturas de solução.

2.4 Bifurcações de Soluções Síncronas Estáveis

Até agora, classificamos os subespaços centrais de possíveis bifurcações de codimensão um a partir de um equilíbrio totalmente síncrono que pode ocorrer em sistemas de células regulares, mas não discutimos se essas bifurcações podem levar a soluções estáveis. Mais precisamente, suponha que μ_1, \dots, μ_r são os autovalores distintos da matriz de adjacência.

Uma bifurcação de quebra de sincronia associada ao autovalor μ_j pode levar a soluções estáveis somente se existirem matrizes Φ, Ψ de ordem k de modo que todos os autovalores das matrizes M_{μ_i} para $i \neq j$ tenham parte real negativa e todos os autovalores não-nulos de M_{μ_j} tem partes reais negativas. Se esta condição necessária for satisfeita em uma bifurcação de codimensão um, chamamos essa bifurcação de *bifurcação primária*.

É conjecturado que, se k for grande o suficiente, pode haver uma bifurcação primária de quebra de sincronia de codimensão um associada a qualquer autovalor μ_j da matriz de adjacência. Entretanto, essa conjectura pode ser provada apenas para redes regulares cujas matrizes de adjacência **têm autovalores reais**.

Teorema 2.28 ([40, Teorema 7.1]). *Suponha que todos os autovalores da matriz de adjacência A de uma rede regular sejam reais. Sejam $\mu_1 < \dots < \mu_r$ os autovalores distintos de A . Suponha que $k = 2$. Então, para qualquer $1 \leq j \leq r$, existem matrizes Φ e Ψ de modo que os autovalores de M_{μ_i} tem parte real negativa para todos os $i \neq j$ e os autovalores de M_{μ_j} são 0 e negativos.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos deslocar os números μ_i pela mesma constante c . Mais precisamente,

$$\Phi + \mu\Psi = \Phi + c\Psi + (\mu - c)\Psi.$$

Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mu_j = 0$.

O teorema é facilmente observado válido para $j = 1$, mesmo quando $k = 1$. Apenas pegue $\Phi = 0$ e $\Psi = -1$. Da mesma forma, quando $j = r$, defina $\Phi = 0$ e $\Psi = 1$. Portanto, podemos assumir $1 < j < r$. Nesse caso (quando $k = 2$), devemos encontrar as matrizes Φ e Ψ tais que $\text{tr}(M_{\mu_i}) < 0$ para todo i e $\det(M_{\mu_i}) > 0$ para todo $i \neq j$. Afirmamos que isso pode ser feito definindo

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{bmatrix} -1 & \psi \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\phi < \mu_1 \tag{2.22}$$

e

$$\psi < -\frac{\phi}{\mu_{j-1}}. \tag{2.23}$$

Observe que

$$\text{tr}(\Phi + \mu\Psi) = \phi - \mu \quad \text{e} \quad \det(\Phi + \mu\Psi) = -\phi\mu - \psi\mu^2.$$

Assim, a suposição (2.22) implica que

$$\text{tr}(M_{\mu_i}) = \phi - \mu_i < \phi - \mu_1 < 0$$

para todo i , pois $\mu_1 \leq \mu_i$. Afirmamos que $\det(M_{\mu_i}) > 0$ se $i \neq j$. Para verificar isso, observe que para $i \neq j$, $\det(M_{\mu_i}) > 0$ se, e somente se

$$\psi < (-\phi)\frac{1}{\mu_i},$$

o que equivale a

$$-\frac{\phi}{\mu_i} - \psi > 0$$

para todo $i \neq j$.

Como $-\phi > 0$, precisamos escolher ψ suficientemente negativo, ou seja, menor que $-\phi$ vezes o maior valor negativo de $\frac{1}{\mu_i}$. Por causa da ordem dos μ_i 's, esse valor é $\frac{1}{\mu_{j-1}}$, que assumimos em (2.23). \square

Suponha que os autovalores da matriz de adjacência de uma rede regular sejam reais. Se a dimensão da dinâmica interna é $k \geq 2$, o Teorema 2.28 implica que existe uma bifurcação primária de estado estacionário com codimensão 1 associada a qualquer autovalor μ . Esta afirmação não é verdadeira para as bifurcações de Hopf, pelo menos quando $k = 2$.

Assuma que uma rede regular tenha uma matriz de adjacência A com um autovalor negativo μ_1 , um autovalor zero e um autovalor positivo μ_r . Suponha também que $k = 2$. Então uma bifurcação Hopf associada ao autovalor 0 de A não pode ser a bifurcação primária. Para verificar esse ponto, observe que se a matriz $M_0 = \Phi$ de ordem 2 tiver autovalores puramente imaginários, segue que $\text{tr}(\Phi) = 0$ e, portanto, que

$$\text{tr}(M_1) = \mu_1 \text{tr}(\Psi) \quad \text{e} \quad \text{tr}(M_r) = \mu_r \text{tr}(\Psi).$$

Se $\text{tr}(\Psi) \neq 0$, então os traços das matrizes M_1 e M_r têm sinal oposto e uma delas deve ter um autovalor com parte real positiva. Portanto, o autovalor 0 da matriz de adjacência não pode corresponder a uma bifurcação primária (de Hopf). Se $\text{tr}(\Psi) = 0$, então $\text{tr}(M_1) = 0$ e a bifurcação não é de codimensão um (se $\det(M_1) \geq 0$ ou não é uma bifurcação primária (se $\det(M_1) < 0$). Em resumo, para ter uma bifurcação primária de Hopf associada a um autovalor μ de uma matriz de adjacência geral, deve-se supor que $k \geq 3$.

Observações como essas foram feitas anteriormente na literatura de formação de padrões. É um fato conhecido que não são possíveis bifurcações de quebra de simetria de um equilíbrio totalmente simétrico estável em uma única equação de reação-difusão. Tais bifurcações podem ocorrer apenas em sistemas que consistem em várias equações. Por exemplo, Ermentrout e Lewis [37] mostram a necessidade de três espécies para obter uma bifurcação de Hopf que quebra a simetria de Turing. Generalizaremos esse fato considerando que, se $k \geq 3$, todos os tipos de bifurcação de Hopf podem ocorrer como bifurcações primárias.

Teorema 2.29 ([40, Teorema 7.2]). *Suponha que todos os autovalores da matriz de adjacência A de uma rede regular sejam reais. Sejam $\mu_1 < \dots < \mu_r$ os autovalores distintos de A . Suponha que $k = 3$. Então, para qualquer $1 \leq j \leq r$, existem matrizes Φ e Ψ de ordem 3 de modo que os autovalores de M_{μ_i} tem uma parte real negativa para todo $i \neq j$ e os autovalores de M_{μ_j} são puramente imaginários e negativos.*

Demonstração. Começamos lembrando o clássico critério de Routh-Hurwitz (Routh [76], Hurwitz [59]). Considere um polinômio de grau 3,

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Todas as raízes deste polinômio têm parte real negativa se, e somente se,

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 > a_3.$$

O polinômio tem um par de raízes puramente imaginárias se, e somente se

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 = a_3.$$

Provamos que o autovalor μ_j pode ter uma primeira bifurcação de Hopf quando $k = 3$. Como na prova do Teorema 2.28, podemos transladar todos os autovalores μ_i para que $\mu_j = 0$. Desejamos encontrar matrizes Φ e Ψ de ordem 3 de modo que:

- $\Phi + \mu\Psi$ tem todos os autovalores com partes reais negativas quando $i \neq j$,
- Φ possui um par de autovalores puramente imaginários e um autovalor negativo real.

Prosseguimos escolhendo primeiro um $a > 0$ satisfazendo $a > |\mu_i|$ para todo i . Daí, seja

$$\Phi = \begin{bmatrix} -a & a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\Phi + \mu\Psi = \begin{bmatrix} -a & a + \mu_i & -a \\ 0 & 0 & -a + \mu_i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujo polinômio característico é

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + a\lambda + (a^2 - \mu_i^2) = 0. \quad (2.24)$$

Para $i = j$, temos $\mu_i = 0$ e (2.24) tem raízes $-a$ e $\pm i\sqrt{a}$, enquanto que, para $i \neq j$, todas as raízes de (2.24) têm parte real negativa pelo critério de Routh-Hurwitz. \square

Capítulo 3

SISTEMAS GRADIENTES E HAMILTONIANOS

Discutiremos neste capítulo duas classes de sistemas dinâmicos que apresentam uma conexão entre suas representações topológicas no formalismo de células acopladas. Tal caracterização através da matriz de adjacência relaciona essas classes com o que apresentamos no capítulo anterior sobre a existência de bifurcações de soluções estáveis e abre várias aplicações.

3.1 Sistemas Gradientes

Nesta seção, consideramos os campos vetoriais que são dados pelo gradiente de uma função com valor escalar, chamados de campos vetoriais gradientes. Os campos vetoriais gradientes surgem em uma variedade de aplicações. Por exemplo, eles surgem no estudo de redes neurais e aprendizado de máquina [56] e no estudo de circuitos e redes elétricas [58]. Considere um sistema dinâmico da forma

$$\dot{x} = -\nabla f(x), \quad (3.1)$$

onde $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é um função suave de classe pelo menos C^2 , $x = (x_1, \dots, x_n)$ denota a variável de estado do espaço de fase total $P = (\mathbb{R}^m)^n$ e, para $i = 1, \dots, n$, $x_i \in \mathbb{R}^m$ é a variável da célula i . O sinal de menos em (3.1) é uma convenção relacionada a uma minimização ao invés de um problema de maximização. Na prática, o sistema $\dot{x}(t) = \nabla f(x(t))$ está *invertendo o fluxo*, ou seja, este possui as mesmas curvas integrais que (3.1) apenas com orientação diferente, assim sempre podemos redefinir $f(x)$ como $-f(x)$. A estrutura especial deste campo vetorial, ou seja, o fato de ser um gradiente de uma função com valor escalar, impõe restrições estritas à natureza da dinâmica, como veremos.

Primeiro, deve ficar claro que os pontos de equilíbrio de (3.1) são pontos singulares de $f(x)$. Além disso, em qualquer ponto, exceto em um ponto de equilíbrio, o campo vetorial (3.1) é

perpendicular aos conjuntos de níveis de $f(x)$. Podemos obter mais informações diferenciando $f(x)$ ao longo de trajetórias de (3.1), ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{f}(x) &= \nabla f(x) \cdot \dot{x}, \\ &= \nabla f(x) \cdot (-\nabla f(x)), \\ &= -|\nabla f(x)|^2,\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde “ \cdot ” é o produto interno euclidiano, $|\cdot|$ é a norma euclidiana induzida e a notação de Newton indica derivada com respeito ao tempo. O próximo resultado segue imediatamente deste cálculo.

Proposição 3.1. $\dot{f}(x) \leq 0$ e $\dot{f}(x) = 0$ se, e somente se, x for um ponto de equilíbrio de (3.1).

Também é fácil ver que a matriz associada à linearização num ponto de equilíbrio de um campo vetorial gradiente pode ter apenas autovalores reais. Isso vem do fato de que $-\nabla^2 f(x)$, a matriz Hessiana do potencial coincide com a matriz Jacobiana do sistema, que é uma matriz simétrica e logo, possui apenas autovalores reais. Observe que devido a isso, sistemas gradientes não podem exibir bifurcação de Hopf.

Assim, partindo da definição de conjuntos de entradas de uma rede, temos o seguinte resultado sobre sistemas gradientes.

Proposição 3.2. Uma condição necessária para uma rede homogênea satisfazer (3.1) é que os seus acoplamentos sejam todos bidirecionais. Dito de outro modo, é necessário que a matriz de adjacência associada ao digrafo da rede seja simétrica.

Demonstração. Seja F um campo vetorial admissível tal que $F = \nabla f$ para algum campo escalar f . Sejam $c, d \in \mathcal{C}$ tais que c está acoplada a d pela seta $e' \in I(d)$. Temos $F = (F_1, \dots, F_n)$ onde

$$F_d(x_d, x_{I(d)}) = F_d(x_d, \dots, x_c, \dots) = \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_d, \dots, x_c, \dots).$$

Como o campo F é gradiente, devemos ter $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ para todo $i \neq j$ (campo conservativo), ou seja,

$$\frac{\partial F_d}{\partial x_c} = \frac{\partial F_c}{\partial x_d} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_c} \frac{\partial f}{\partial x_d} = \frac{\partial}{\partial x_d} \frac{\partial f}{\partial x_c}$$

onde devemos ter $F_c(x_c, \dots, x_d, \dots)$, ou seja, existe uma seta $e'' \in I(c)$ de modo que d também está acoplada à célula c como queríamos mostrar. \square

A Proposição 3.2 nos permite simplificar a representação de uma rede associada a um sistema gradiente. Podemos associar a cada par de setas entre células uma aresta, tornando o digrafo da rede num grafo não-direcionado usual.

Proposição 3.3. *O conjunto das redes homogêneas finitas de sistemas gradiente é isomorfo ao conjunto dos grafos rotulados finitos.*

Demonstração. Basta notar que para o digrafo de uma rede \mathcal{G} com matriz de adjacência simétrica $A_{\mathcal{G}}$ e um grafo não-direcionado de uma rede \mathcal{N} onde cada aresta representa um par de setas com matriz de adjacência $A_{\mathcal{N}}$ serem isomorfos, deve existir uma matriz de permutação P tal que $A_{\mathcal{G}} = PA_{\mathcal{N}}P^{\top}$. Porém, como estamos fixando rótulos em ambos os vértices e cada rede tem por hipótese todas as dinâmicas internas, a única permutação possível é a identidade. Logo, para cada grafo simples, existe um único *digrafo simétrico correspondente*. \square

O principal resultado desta seção caracteriza as funções admissíveis, ou seja, funções suaves cujos gradientes são campos vetoriais admissíveis. Essas funções são decompostas como os pares de codimensão um (Φ, Ψ) : uma componente que depende da dinâmica interna (funções de dinâmica interna) e a que depende da arquitetura da rede (funções de acoplamento).

3.1.1 Funções Admissíveis

A função f cujo gradiente é um campo vetorial admissível para uma determinada rede \mathcal{G} é chamada de *função gradiente admissível*. Portanto, a estrutura do gradiente de um sistema acoplado está em correspondência com a existência de uma função gradiente admissível associada. Observamos que uma condição necessária para um campo vetorial admissível ser gradiente é que cada célula individual também seja gradiente.

Definição 3.4. Para uma rede \mathcal{G} , uma função suave $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função gradiente admissível* se seu gradiente ∇f for um campo vetorial \mathcal{G} -admissível.

Em [64], a caracterização de funções gradiente admissíveis é dada para redes bidirecionais sem arestas múltiplas. Aguiar *et al.* [2] observaram que o resultado pode ser naturalmente estendido para redes com várias arestas e laços. O resultado é dado no Teorema 3.6 a seguir.

O próximo resultado é uma das principais restrições impostas aos campos vetoriais admissíveis quando são do tipo gradiente.

Lema 3.5 ([64, Lema 2.2]). *Dada uma rede \mathcal{G} com $|\mathcal{V}| \geq 3$, se uma função suave $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função gradiente admissível, então, a menos que seu grafo seja completo, temos que para qualquer $1 \leq i, j, \ell \leq k$,*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_{v_1}^i \partial x_{v_2}^j \partial x_{v_3}^\ell} \equiv 0, \quad (3.3)$$

se v_1, v_2, v_3 são vértices distintos em \mathcal{G} .

Demonstração. Provaremos por indução sobre o número de vértices em \mathcal{G} . Por simplicidade, a prova é realizada para $k = 1$, mas o resultado é igual para qualquer dimensão $k > 1$. Para $|\mathcal{V}| = 3$, se (3.3) não se mantiver, então para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $\partial f / \partial x_{v_i}$ é uma função não trivial das outras duas variáveis e assim, \mathcal{G} necessariamente tem seus três vértices acoplados um ao outro. Para $n \geq 4$, suponha que se uma rede tiver $n - 1$ células e três células distintas para as quais (3.3) não ocorre, então todas elas serão acopladas entre si. Agora, seja $|\mathcal{V}| = n$ e suponha que existam $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$ distintos, de modo que (3.3) falhe. Seja $u \in \mathcal{V}$ onde $u \neq v_1, v_2, v_3$. Desde que \mathcal{G} é conexo, existe $w \in \mathcal{V}$ tal que $(u, w) \in \mathcal{E}$. Pela hipótese de indução, todos os vértices em \mathcal{G} , exceto possivelmente u , são todos acoplados entre si. Em particular $w \in I(v_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Agora, para $i \in \{1, 2, 3\}$, usamos a forma (2.1) com simetria de $\partial f / \partial x_{v_i}$ juntamente com a hipótese de derivadas de terceira ordem em relação a $x_{v_1}, x_{v_2}, x_{v_3}$ não-evanescentes para concluir que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_{v_1} \partial x_{v_2} \partial x_w} \neq 0, \quad (3.4)$$

Mas pela hipótese de indução também temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_w} = \tilde{f}_{n-1}(x_w, \overline{x_{v_1}, \dots, x_{v_{n-1}}, x_u}).$$

Assim, para $i = 1, \dots, n - 2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_u \partial x_w} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{v_i}} \right) \neq 0,$$

e deste modo, $u \in \bigcap_{v \in \mathcal{V} \setminus \{v\}} I(v)$, ou seja, vértices in \mathcal{G} estão todos acoplados. Se $u = v_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$, apenas reorganizamos os índices em (3.4) para chegar na mesma conclusão. \square

Antes de prosseguir, lembramos que uma rede é dita bipartida se seu conjunto de vértices \mathcal{V} puder ser dividido em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 , de modo que cada aresta de \mathcal{G} conecta um vértice de um subconjunto a um vértice do outro [95]. Se a rede é bipartida, reorganizamos a numeração de células, se necessário, para que $V_1 = \{1, \dots, r\}$ e $V_2 = \{r + 1, \dots, n\}$, $r > 1$, e a matriz de adjacência $A_{\mathcal{G}}$ de ordem n tem a forma

$$A_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0_r & B \\ C & 0_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.6 ([2, Teorema 5.2]). *Seja \mathcal{G} uma rede bidirecional que possa ter várias arestas e laços. Uma função $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função gradiente admissível associada a \mathcal{G} se, e somente se, existem funções suaves $\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = \sum_{i=1, i \leq j}^n a_{ij} \beta(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^n \alpha(x_i). \quad (3.5)$$

Se \mathcal{G} é bipartida e além disso existem $v_i \in V_1$ e $v_j \in V_2$ com a mesma valência, ou se \mathcal{G} não é bipartida, então β é invariante por permutações das variáveis de estado.

Demonstração. Seguimos os passos da prova de [64, Teorema 2.4]. A ideia principal por trás dessa prova é o fato de que o componente f_v de um campo vetorial admissível na direção de um vértice $v \in \mathcal{V}$ é uma função invariante sob qualquer permutação das variáveis de entrada correspondentes, digamos u_1, \dots, u_ℓ , para algum, $\ell \geq 1$. Os grafos em [64, Teorema 2.4] não têm arestas múltiplas, caso em que f_v é da forma

$$f_v(x) = f_v(x_v, \overline{x_{u_1}, \dots, x_{u_\ell}}),$$

com $u_1 \neq u_j$ para $i \neq j, i, j = 1, \dots, \ell$. Como consequência, o termo de acoplamento da função admissível f é a soma de uma regra em duas variáveis aplicadas a cada (x_{v_i}, x_{v_j}) sempre que houver uma aresta do vértice v_i ao vértice v_j , que é no máximo uma aresta nesse caso. Se houver várias arestas em um vértice v , então f_v ainda está na forma acima, mas com variáveis de vértices repetidas sob a barra de permutação. Se v_i é tal vértice, então existem a_{ij} arestas de v_i a v_j , com $j = 1, \dots, a_{ij}$. Essas arestas contribuirão com a_{ij} termos iguais na soma dos termos do acoplamento. \square

Exemplo 3.7. A mais simples rede com múltiplas arestas é dada na Figura 3.1 onde cada aresta corresponde a um acoplamento bidirecional. No Teorema 3.6, escolhendo os espaços de fase da célula para \mathbb{R} , a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = -2x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 \quad (3.6)$$

é uma função gradiente admissível para essa rede.

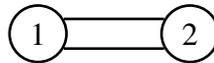


Figura 3.1: A mais simples rede de 2 células com múltiplas arestas.

Exemplo 3.8. Considere a rede Q_1 da Figura 2.4 (esquerda). Do Teorema 3.6, a forma geral das funções gradiente admissíveis para essa rede com $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ é dada por

$$f(x_1, x_3, x_5) = \beta(x_1, x_3) + 2\beta(x_1, x_5) + 2\beta(x_3, x_5) + \beta(x_5, x_5) + \alpha(x_1) + \alpha(x_3) + \alpha(x_5).$$

É interessante observar que um campo vetorial admissível de uma rede bidirecional pode suportar uma restrição a um subespaço invariante com dinâmica gradiente mesmo sem ser de fato um campo gradiente, como ilustraremos no próximo exemplo.

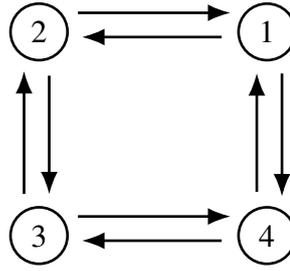


Figura 3.2: Uma rede bidirecional regular de 4 células com valência 2.

Exemplo 3.9. Considere a rede da Figura 3.2. Relembrando [64, Lema 2.2] que para qualquer rede com mais de 3 vértices, uma condição necessária para uma função f ser admissível para essa rede é

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \equiv 0, \quad (3.7)$$

para quaisquer células distintas i, j, k . Assim, o sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 x_4 + x_1(x_2 + x_4) \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_3 + x_2(x_1 + x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_2 x_4 + x_3(x_2 + x_4) \\ \dot{x}_4 &= x_1 x_3 + x_4(x_1 + x_3) \end{aligned} \quad (3.8)$$

define um SCA para a rede da Figura 3.2 que não é gradiente. Como a relação de equivalência $\bowtie = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ é balanceada para essa rede, temos que $\Delta_{\bowtie} = \{x \mid x_1 = x_3, x_2 = x_4\}$ é um subespaço de sincronia. Além disso, a rede quociente correspondente é a rede exibida na Figura 3.1. Deste modo, (3.8) restrita a Δ_{\bowtie} corresponde a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 + 2x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + 2x_2 x_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

que é um sistema gradiente admissível para a rede da Figura 3.1. Observe que $f/2$, para f em (3.6), também é uma função gradiente admissível.

Como naturalmente esperado, campos vetoriais gradiente admissíveis podem ser levantados para campos vetoriais que ainda são gradientes.

Exemplo 3.10. O campo vetorial (3.9) associado com a rede da Figura 3.1 pode ser levantado para um campo vetorial admissível da rede da Figura 3.2 que é gradiente. De fato, tomando

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \beta(x_2, x_1) + \beta(x_2, x_3) + \beta(x_4, x_1) + \beta(x_4, x_3),$$

para $\beta(x, y) = -1/2(x^2 y + x y^2)$, temos que \tilde{f} é uma função gradiente admissível para a rede

da Figura 3.2 que restringe-se a (3.6) no subespaço de sincronia Δ . Ou seja, a restrição da função gradiente admissível \tilde{f} para essa rede é ainda uma função gradiente admissível.

3.2 Sistemas Hamiltonianos

Nesta seção, consideramos uma classe de sistemas dinâmicos bem conhecida. Discutiremos os campos vetoriais que são dados por uma função com valor escalar a partir das conhecidas *equações de Hamilton*. Na Física, sistemas dinâmicos hamiltonianos descrevem a evolução de um sistema físico, como um sistema planetário ou um elétron em um campo eletromagnético.

Dada uma função $h(q, p) : P \rightarrow \mathbb{R}$, um sistema dinâmico acoplado hamiltoniano é um sistema definido a partir de $2mn$ equações diferenciais ordinárias

$$(\dot{q}, \dot{p})^\top = \mathbf{J} \nabla h(q, p), \quad (3.10)$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0_{nm} & \mathbf{I}_{nm} \\ -\mathbf{I}_{nm} & 0_{nm} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

é uma matriz anti-simétrica, $q = (q_1, \dots, q_n)$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$ são chamados vetores de posição e momento, respectivamente, e formam o espaço de fase total $P = (\mathbb{R}^{2m})^n$ e, para $i = 1, \dots, n$, $(q_i, p_i) \in \mathbb{R}^{2m}$ é a variável de posição e momento de cada célula i .

Como no caso gradiente, sistemas acoplados hamiltonianos destacam-se pelo seguinte:

Teorema 3.11. *Suponha que um sistema hamiltoniano de equações diferenciais possa ser representado como um sistema acoplado de células hamiltonianas e sua rede seja conexa. Então, a rede é acoplada bidirecionalmente, ou seja, a sua matriz de adjacência é simétrica.*

Demonstração. Dado que o sistema é hamiltoniano, existe uma função hamiltoniana correspondente que pode ser escrita, considerando $x_i = (q_i, p_i)$, como

$$h = \sum_{i=1}^n h_i(x_i) + h_c,$$

onde, $\sum_{i=1}^n h_i$ representa a dinâmica interna dentro dos subsistemas e h_c deve capturar toda a dinâmica de acoplamento. Se o número de nós no sistema for $n = 1$, então $h_c = 0$ e o sistema é trivialmente conexo por zero setas. Suponha que $n \geq 2$. Agora, as equações diferenciais de cada x_i podem ser escritas como

$$\dot{x}_i = \mathbf{J}_{m_i} \nabla_{x_i} h = \mathbf{J}_{m_i} \nabla_{x_i} (h_i + h_c)$$

em que \mathbf{J}_{m_i} é obtida de $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_{m_i} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{S}$, onde $\mathbf{S} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{mn+1}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{mn+2}, \dots, \mathbf{e}_{mn}, \mathbf{e}_{2mn}]$ é uma matriz de permutação conhecida por *permutação de embaralhamento perfeito* (perfect shuffle). Como temos uma rede conexa, $\nabla_{x_i} h_c \neq 0$ e $\nabla_{x_i} h_c$ deve ser uma função de x_j para algum $j \neq i$. Se $\nabla_{x_i} h_c$ não depende de qualquer outra variável de estado, então a rede é desconexa. De modo análogo a Proposição 3.2, a igualdade das derivadas parciais mistas de h_c com respeito a x_i e x_j nos diz que $\nabla_{x_j} h_c \neq 0$ e assim, $\nabla_{x_j} h_c$ também depende de x_i , de onde concluímos que todos os acoplamentos devem ser bidirecionais e a matriz de adjacência dessa rede é simétrica. \square

A função $h : \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (3.10) é a função hamiltoniana do sistema e quando esse sistema de equações é um SCA para uma determinada rede \mathcal{G} , ela é chamada de *função hamiltoniana admissível* de \mathcal{G} . Assim, a estrutura hamiltoniana de um sistema acoplado está em correspondência com a existência de uma função hamiltoniana admissível associada a ele. Além disso, uma condição necessária para que um campo vetorial admissível seja hamiltoniano é que cada célula individual seja também hamiltoniana.

No teorema a seguir, caracterizamos as funções hamiltonianas admissíveis de qualquer rede bidirecional. Isso corresponde à versão hamiltoniana do Teorema 3.6 da seção anterior.

Teorema 3.12 ([2, Teorema 5.7]). *Seja \mathcal{G} uma rede bidirecional que possa ter várias arestas e laços. Uma função $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função hamiltoniana admissível associada a \mathcal{G} se, e somente se, existem funções suaves $\alpha : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$h(q, p) = \sum_{i=1, i \leq j}^n a_{ij} \beta(q_i, q_j, p_i, p_j) + \sum_{i=1}^n \alpha(q_i, p_i). \quad (3.12)$$

Se \mathcal{G} é bipartida e além disso existem $v_i \in V_1$ e $v_j \in V_2$ com a mesma valência, ou se \mathcal{G} não é bipartida, então β é invariante pela permutação $\sigma(q_i, q_j, p_i, p_j) = (q_j, q_i, p_j, p_i)$.

Demonstração. É idêntica a prova do Teorema 3.6 e 3.12. Para ver isso, considere a semelhança entre as expressões (3.5) e (3.12) para que os argumentos algébricos usados para provar o resultado de uma função gradiente admissível no primeiro caso sejam mantidos para construir uma função hamiltoniana admissível para o segundo. Para o presente caso, é crucial notar que o Lema 3.5 vale substituindo cada x_ℓ com $\ell = i, j, k$, por q_ℓ e p_ℓ . \square

Exemplo 3.13. Considere novamente a rede da Figura 3.1. Tomando \mathbb{R}^2 como o espaço de fase das células, a função $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(q_1, q_2, p_1, p_2) = 2p_1^2 q_2 + 2p_2^2 q_1, \quad (3.13)$$

é uma função hamiltoniana admissível para essa rede.

Assim como no caso gradiente, um campo vetorial admissível de uma rede bidirecional pode suportar uma restrição a um subespaço invariante com dinâmica hamiltoniana mesmo sem ser de fato um campo hamiltoniana, como exibiremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.14. Considere novamente a rede da Figura 3.2. Observe que o seguinte SCA

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= p_1(q_2 + q_4) \\
 \dot{q}_2 &= p_2(q_1 + q_3) \\
 \dot{q}_3 &= p_3(q_2 + q_4) \\
 \dot{q}_4 &= p_4(q_1 + q_3) \\
 \dot{p}_1 &= -p_2 p_4 \\
 \dot{p}_2 &= -p_1 p_3 \\
 \dot{p}_3 &= -p_2 p_4 \\
 \dot{p}_4 &= -p_1 p_3
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

é admissível para essa rede mas não é hamiltoniano. Porém, sua restrição para o subespaço de sincronia $\Delta_h = \{(q, p) \mid (q_1, p_1) = (q_3, p_3), (q_2, p_2) = (q_4, p_4)\}$, induz a rede quociente da Figura 3.1 com equações reduzidas

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= 2p_1 q_2 \\
 \dot{q}_2 &= 2p_2 q_1 \\
 \dot{p}_1 &= -p_2^2 \\
 \dot{p}_2 &= -p_1^2 .
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Essas equações definem um SCA hamiltoniano admissível para a rede quociente da Figura 3.1. Observe que $h/2$, para h em (3.13), é uma função hamiltoniana admissível para essa rede quociente.

Similar ao caso gradiente, existem levantamentos de sistemas hamiltonianos que ainda são hamiltonianos.

Exemplo 3.15. O SCA hamiltoniano e admissível 3.15 associado à rede da Figura 3.1 pode ser levantado para um SCA que é admissível e hamiltoniano para seu levantamento da Figura 3.2. Note que $\tilde{h} : (\mathbb{R}^4)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defina por

$$\tilde{h}(q, p) = \beta(q_2, q_1, p_2, p_1) + \beta(q_2, q_3, p_2, p_3) + \beta(q_4, q_1, p_4, p_1) + \beta(q_4, q_3, p_4, p_3),$$

para $\beta(x, y, z, w) = 1/2(z^y + 2w^2x)$, é uma função hamiltoniana admissível para essa rede que restringe-se a (3.13) no subespaço de sincronia Δ_h .

3.2.1 Relação entre Sistemas Gradientes e Hamiltonianos

A forma geral das funções gradiente admissíveis e funções hamiltonianas admissíveis para uma rede \mathcal{G} e sua rede quociente Q estão relacionadas da seguinte maneira:

Teorema 3.16 ([2, Teorema 5.11]). *Seja \mathcal{G} uma rede bidirecional e seja \bowtie uma coloração balanceada de \mathcal{G} que define uma rede quociente conexa bidirecional $Q = \mathcal{G} / \bowtie$. Seja $f^{\mathcal{G}}$ ($h^{\mathcal{G}}$) uma função gradiente (hamiltoniana) admissível de um sistema de células acoplados gradiente (hamiltoniano) de \mathcal{G} . Então, existe uma função gradiente (hamiltoniana) admissível f^Q (h^Q) para o sistema de células acopladas de \mathcal{G} restrito a Δ_{\bowtie} , de modo que*

$$f^{\mathcal{G}}|_{\Delta_{\bowtie}} \equiv k f^Q, \quad h^{\mathcal{G}}|_{\Delta_{\bowtie}} \equiv k h^Q,$$

onde k é a cardinalidade das \bowtie -classes.

Demonstração. Segue do Teorema 2.9 que a cardinalidade k de cada \bowtie -classe deve ser a mesma. O resultado segue então dos Teoremas 3.6 e 3.12 e a definição de rede quociente. \square

Corolário 3.17 ([2, Corolário 5.12]). *Seja \mathcal{G} uma rede bidirecional e \bowtie uma coloração balanceada de \mathcal{G} que define uma rede quociente bidirecional $Q = \mathcal{G} / \bowtie$. Então:*

- (i) *As funções gradientes (hamiltonianas) admissíveis para \mathcal{G} restritas ao subespaço de sincronia determinado por \bowtie são funções gradientes (hamiltonianas) admissíveis para Q .*
- (ii) *Uma função gradiente (hamiltoniana) admissível para Q é uma restrição de uma função gradiente (hamiltoniana) admissível para \mathcal{G} .*

Para um SCA com estrutura gradiente ou hamiltoniana associado a uma rede \mathcal{G} bidirecional, somos capazes de identificar os subespaços fluxo-invariantes em que a restrição da dinâmica ainda é gradiente ou hamiltoniana. Esses são os subespaços definidos por cada relação balanceada \bowtie para a qual $Q = \mathcal{G} / \bowtie$ também é bidirecional (ver o Teorema 2.9).

3.3 Autoespaços de Redes Hamiltonianas

Usando os resultados já estabelecidos, podemos construir redes acoplando células Hamiltonianas a funções e topologia adequadas. Nesta seção, vamos nos concentrar na parte linear dos sistemas de células hamiltonianas. Começamos com uma revisão da estrutura linear de rede regulares hamiltonianas partindo do contexto da Seção 2.2.1. Em seguida, descrevemos as bifurcações genéricas de codimensão um para sistemas hamiltonianos.

Definição 3.18. Dizemos que uma matriz M é hamiltoniana se, dada uma matriz \mathbf{J} de estrutura simplética na forma (3.11), esta satisfaz

$$M^T \mathbf{J} + \mathbf{J} M = 0. \quad (3.16)$$

Temos uma caracterização para um sistema hamiltoniano linearizado na origem provida por Chan *et al.* [22]:

Corolário 3.19 ([22, Corolário 2.7]). *Suponha que tenhamos uma rede regular cuja dinâmica interna de cada célula seja hamiltoniana. Então, o sistema linearizado na origem é hamiltoniano se, e somente se, a matriz de acoplamento Ψ for hamiltoniana e a matriz de adjacência da rede for simétrica.*

Relembrando as relações (2.3) e (2.4), adaptamos o Lema 2.17 e o Lema 2.20 pelo Capítulo 2 ao nosso contexto, onde A é uma matriz simétrica do Corolário 3.19 e, portanto, seus autovalores e autovetores são reais. O primeiro afirma que os autovalores das matrizes M_{μ_i} são os autovalores da matriz jacobiana \mathcal{J} de um sistema hamiltoniano.

Lema 3.20. *Os $2mn$ autovalores da jacobiana \mathcal{J} são a união dos autovalores das matrizes M_{μ_i} . Especificamente, seja $u \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor de A . Então*

$$\mathcal{J}(u \otimes v) = u \otimes (M_{\mu} v).$$

Portanto, se $v \in \mathbb{C}^{2m}$ é um autovetor de M_{μ} , então $u \otimes v$ é um autovetor de \mathcal{J} .

Lema 3.21. *Seja $\mu \in \mathbb{R}$ um autovalor de A e denote por $E_{\mu}(A) \subset \mathbb{R}^n$ o autoespaço generalizado associado. Então, $E_{\mu}(A) \otimes \mathbb{C}^{2m}$ é invariante por \mathcal{J} .*

Exemplo 3.22. Considere a rede \mathcal{G}_1 mostrada na Figura 3.3 com sua matriz de adjacência A_1 .

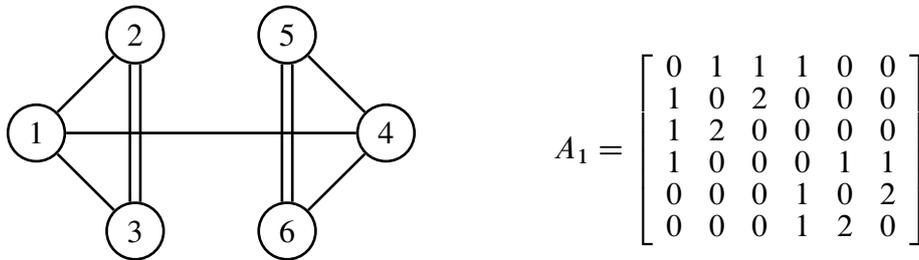


Figura 3.3: Rede regular não-direcionada de 6 células com simetria \mathbb{D}_2 e sua matriz de adjacência.

A rede \mathcal{G}_1 possui grupo de simetria abeliano \mathbb{D}_2 . Os autovalores de A_1 são $3, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17}), -2, -2, 0$. A simetria \mathbb{D}_2 não é suficiente para garantir o duplo autovalor -2 pois representações

irredutíveis de grupos abelianos são unidimensionais. Assim, a multiplicidade 2 do autovalor -2 é uma consequência da estrutura particular da rede. Por (2.4), os autovalores de \mathcal{J} são obtidos calculando os autovalores das matrizes $M_3 = \Phi + 3\Psi$, $M_0 = \Phi$, $M_{\mu_{\pm}} = \Phi + \mu_{\pm}\Psi$ onde $\mu_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$, e $M_{-2} = \Phi - 2\Psi$, todas de ordem $2m$. Apenas para fins de comparação com a perspectiva da dinâmica equivariante, considere agora a decomposição \mathbb{D}_2 -isotípica de \mathbb{R}^6 dada por $\mathbb{R}^6 = T^2 \oplus B_1^2 \oplus B_2^2$, onde T corresponde a representações triviais geradas pelos vetores $(1, 0, 0, 1, 0, 0)^T$ e $(0, 1, 1, 0, 1, 1)^T$, B_1 corresponde a representações alternadas geradas por $(0, 1, 1, 0, -1, -1)^T$ e $(1, 0, 0, -1, 0, 0)^T$ enquanto B_2 corresponde também a representações alternadas (não isomorfas a B_1) geradas por $(0, 1, -1, 0, 1, -1)^T$, $(0, 1, -1, 0, -1, 1)^T$. Nessa base, temos $\mathcal{J} = \text{diag}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi - 2\Psi, \Phi - 2\Psi)$ onde

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi + \Psi & \Psi \\ 2\Psi & \Phi + 2\Psi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \Phi + 2\Psi & \Psi \\ \Phi - \Psi & \Psi \end{bmatrix}.$$

Deste modo, vemos a vantagem computacional de usar a matriz de adjacência para calcular o espectro jacobiano notando que a decomposição por simetria requer o cálculo dos autovalores de matrizes de ordem $4m$ ao invés de ordem $2m$.

3.3.1 Pares de Codimensão Um em Sistemas Hamiltonianos

Visto que estamos estudando sistemas de células acopladas reais, as matrizes linearizadas Φ e Ψ devem ser matrizes hamiltonianas reais. Consequentemente, M_{μ} também é uma matriz hamiltoniana real. Para matrizes hamiltonianas reais, se η é um autovalor, então $-\eta$ também é um autovalor [66, Proposição 3.3.1]. Denotamos por $\eta_{\mathbb{R}}$ o conjunto de autovalores reais de uma matriz hamiltoniana que são diferentes de zero, isto é, $\eta_{\mathbb{R}} = \{\eta \mid \eta \in \mathbb{R}; \eta \neq 0\}$. Da mesma forma, deixe $\eta_{i\mathbb{R}}$ denotar o conjunto de autovalores puramente imaginários, isto é, $\eta_{i\mathbb{R}} = \{\eta \mid \eta \in \mathbb{C}; \text{Re}(\eta) = 0\}$. Se $\eta \in \eta_{\mathbb{R}}$ ou $\eta \in \eta_{i\mathbb{R}}$, então claramente η e $-\eta$ formam um par de autovalores no eixo real ou imaginário, respectivamente.

Seja $\eta_{\mathbb{C}}$ o conjunto de autovalores verdadeiramente complexos, ou seja, $\eta_{\mathbb{C}} = \{\eta \mid \eta \in \mathbb{C}, \text{Im}(\eta) \neq 0\}$. Como o sistema é real e os autovalores complexos para matrizes reais devem vir em pares conjugados, se $\eta \in \eta_{\mathbb{C}}$ é um autovalor de M_{μ} , $-\eta$, $\bar{\eta}$ e $-\bar{\eta}$ também são autovalores. Juntos, esses quatro autovalores formam um *quarteto de Krein* [65, Capítulo 9]. Seja η_0 o conjunto de autovalores nulos de M_{μ} . Com base em nossa discussão anterior, vemos que a multiplicidade de autovalores nulos deve ser par.

Conforme descrito por Dellnitz *et al.* [27], em sistemas hamiltonianos genéricos de um parâmetro, existem dois tipos de bifurcações de equilíbrio:

- (a) uma bifurcação em estado estacionário com um autovalor zero com multiplicidade dois, ou
- (b) uma bifurcação hamiltoniana Hopf com um par de autovalores puramente imaginários tendo multiplicidade dois.

Seja $\eta \in \mathbb{C}$ um autovalor de uma matriz hamiltoniana \mathcal{J} . Denotamos por $G_{\mathcal{J}}(\eta)$ o autoespaço generalizado associado a η . Para bifurcações estacionárias, o autovalor nulo de uma matriz hamiltoniana tem multiplicidade dois e, portanto, $\dim(G_{\mathcal{J}}(0)) = 2$. Para uma bifurcação de Hopf hamiltoniana, a dimensão do autoespaço generalizado de $\pm i\omega$ é $\dim(G_{\mathcal{J}}(i\omega)) = 4$.

Para estudar as bifurcações da codimensão um em redes regulares, vimos o conceito de *pares de codimensão um* na Definição 2.18. Essa definição se concentra em autovalores com partes reais distintas e isso é suficiente para estudar bifurcações em sistemas dissipativos. A bifurcação nesses sistemas ocorre genericamente se o autovalor da bifurcação for simples e cruzar o eixo imaginário transversalmente. Por outro lado, as bifurcações em sistemas hamiltonianos ocorrem através de colisões de autovalores na origem do plano complexo ou no eixo imaginário. Essas colisões nem sempre resultam em perda de estabilidade e surgimento de novas soluções. Podemos usar a *assinatura de Krein* [65, Seção 9.11] para prever o comportamento de colisão dos autovalores.

Definição 3.23. Seja K uma matriz hamiltoniana e $H(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^T \mathbf{J}K\xi$ seja o hamiltoniano quadrático correspondente. Se K tiver um par de autovalores não-nulos $\pm i\omega$ com autovetores $u = v \pm iw$ e seja $\zeta \in E_{\pm i\omega} = \text{span}(v, w)$ qualquer vetor no subespaço invariante para $\pm i\omega$. A assinatura de Krein de $E_{\pm i\omega}$ é dada por

$$\text{sgn}(H(\zeta)),$$

onde sgn é a assinatura da forma quadrática H .

Observe que a assinatura de Krein está bem definida para autovalores simples. Para um autovalor puramente imaginário com multiplicidade 2, se essa multiplicidade dupla surgir de um par de autovalores puramente imaginários simples, colidindo quando um parâmetro é variado, duas situações podem surgir: os autovalores têm a mesma assinatura de Krein e isso é chamado de ressonância 1 : 1; ou eles têm assinatura de Krein diferente e isso é chamado de ressonância 1 : -1, veja [55]. O caso de ressonância 1 : 1 não leva a bifurcações (ver [65, Teorema 9.18]).

Devido a diferenças no movimento de autovalores entre os casos dissipativo e hamiltoniano, introduzimos uma definição alternativa de pares de codimensão um para redes hamiltonianas. Começamos definindo os seguintes conjuntos. Seja $\mathcal{M}(2m)$ o espaço das matrizes hamiltonianas reais de ordem $2m$. Seja \mathcal{R}_1 o conjunto dos pares $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{M}(2m)^2$ de modo que todos os

autovalores de $M_{\mu_1}, \dots, M_{\mu_s}$ são distintos. Definimos \mathcal{R}_2 de forma semelhante a \mathcal{R}_1 , exceto que uma das matrizes $M_{\mu_1}, \dots, M_{\mu_s}$ possui um autovalor zero não semisimples de multiplicidade 2 ou um autovalor em $\eta_{i\mathbb{R}}$ em ressonância $1 : -1$.

Definição 3.24. Suponha que $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}(2m)$ e M_μ como em (2.4). O par (Φ, Ψ) é um *par de codimensão um hamiltoniano* se $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{R}_1$ ou $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{R}_2$. O conjunto de todos os pares de codimensão um hamiltonianos é denotado por $\hat{\mathcal{L}}_2(2m) = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

Observação 3.25. O complemento de $\hat{\mathcal{L}}_2(2m)$ não é de codimensão dois no espaço das matrizes hamiltonianas, pois também contém o caso dos autovalores reais não nulos de multiplicidade dois e este é um fenômeno de codimensão um. Mas isso não é relevante para as bifurcações que estamos interessados em estudar, pois queremos identificar a forma do jacobiano \mathcal{J} correspondente a bifurcações genéricas de codimensão um em sistemas hamiltonianos.

Se $\hat{\mathcal{L}}_2(2m)$ é denso em $\mathcal{M}(2m)^2$, então uma bifurcação de codimensão um genérica corresponde a um par de autovalores não semisimples em um único bloco M_μ . Agora, reestabelecemos a Proposição 2.19 para o contexto hamiltoniano.

Proposição 3.26 ([22, Proposição 3.8]). *O conjunto de pares de codimensão um hamiltonianos $\hat{\mathcal{L}}_2(2m)$ é aberto e denso em $\mathcal{M}(2m)^2$.*

Demonstração. Observe que, como mostrado na Proposição 2.19, se restringimos $\hat{\mathcal{L}}_2(2m)$ a \mathcal{R}_1 , temos um subconjunto denso de $\mathcal{M}(2m)^2$. Como $\mathcal{R}_1 \subset \hat{\mathcal{L}}_2(2m) \subset \mathcal{M}(2m)^2$, \mathcal{R}_1 ser denso em $\mathcal{M}(2m)^2$ implica que é denso em $\hat{\mathcal{L}}_2(2m)$. O que resta para provar é que, se $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{R}_2$, existe uma pequena bola aberta em torno deste ponto, inteiramente contida em $\hat{\mathcal{L}}_2(2m)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Suponha primeiro que $M_\mu = \Phi + \mu\Psi$ tenha um autovalor 0 não semisimples de multiplicidade 2. Seja $(\Phi^\dagger, \Psi^\dagger)$ a ε -bola que contém (Φ, Ψ) . Então, ou M_μ^\dagger ainda tem um autovalor 0 não semisimples de multiplicidade 2 e daí $(\Phi^\dagger, \Psi^\dagger) \in \mathcal{R}_2$, ou o autovalor 0 se divide em um par conjugado de autovalores puramente imaginários, um par de autovalores reais ou um quarteto de autovalores complexos. Como os outros autovalores do par (Φ, Ψ) são distintos, escolhendo um ε pequeno o suficiente, todos os autovalores diferentes de zero de M_μ^\dagger são distintos dos demais e $(\Phi^\dagger, \Psi^\dagger) \in \mathcal{R}_1$. Assim, $(\Phi, \Psi) \in \hat{\mathcal{L}}_2(2m)$.

Suponha, em vez disso, que (Φ, Ψ) detenha um autovalor puramente imaginário que não seja semisimples mas de multiplicidade 2 em ressonância $1 : -1$. Disso temos que, para um ε suficientemente pequeno, a ressonância $1 : -1$ persiste na ε -bola $(\Phi^\dagger, \Psi^\dagger)$ e todos os outros autovalores ainda são distintos, portanto $(\Phi^\dagger, \Psi^\dagger) \in \mathcal{R}_2$. Caso contrário, o autovalor puramente imaginário de multiplicidade 2 se divide em um par de autovalores puramente imaginários (com

assinaturas diferentes) ou em um quarteto de autovalores complexos. Para ε suficientemente pequeno, $(\Phi^\dagger, \Psi^\dagger)$ possui autovalores distintos e, portanto, pertence a \mathcal{R}_1 . \square

Seja η um autovalor de M_μ e seja $E_{\mathcal{J}}(\eta)$ o autoespaço de \mathcal{J} restrito ao subespaço invariante $E_A(\mu) \otimes \mathbb{C}^{2m}$. Se os autovalores forem simples e sob algumas suposições modestas, temos uma versão do Teorema 2.21. Começamos com uma versão no caso de autovalores simples.

Teorema 3.27 ([22, Teorema 3.9]). *Suponha que $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{R}_1$. Seja $\mu \in \mathbb{R}$ um autovalor de A e $\eta \in \mathbb{C}$ um autovalor simples de M_μ . Então, existe um isomorfismo*

$$\varphi : E_A(\mu) \rightarrow E_{\mathcal{J}}(\eta).$$

Demonstração. Se $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{R}_1$, os autovalores são simples. Como A é simétrica, para cada autovalor μ temos uma base de autovetores gerando $E_A(\mu)$. Assim, para cada autovetor $V_\mu \in E_A(\mu)$, definimos $\varphi(V_\mu) = V_\mu \otimes U$ onde U é um autovetor do autovalor simples η de M_μ . Deste modo, $\varphi(V_\mu)$ é automaticamente um elemento do núcleo de \mathcal{J} pelo Lema 3.20. \square

Se $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{R}_2$, existe um bloco M_μ que possui um autovalor com multiplicidade algébrica dois. No próximo teorema, tratamos este caso separadamente para construir o isomorfismo.

Teorema 3.28 ([22, Teorema 3.10]). *Suponha que $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{R}_2$. Seja $\mu \in \mathbb{R}$ um autovalor de A e $\eta \in \mathbb{C}$ um autovalor não-simples de M_μ . Temos dois casos.*

(a) *Se $\eta = 0$, então $\mathcal{G}_{\mathcal{J}} \simeq E_A(\mu) \oplus E_A(\mu)$ e existe uma base de $E_A(\mu) \otimes \mathbb{C}^{2m}$ tal que*

$$\mathcal{J}|_{\mathcal{G}_{\mathcal{J}}(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_p$$

onde $p = \dim E_A(\mu)$.

(b) *Se $\eta = i\omega$, então $\mathcal{G}_{\mathcal{J}} \simeq E_A(\mu) \oplus E_A(\mu) \oplus E_A(\mu) \oplus E_A(\mu)$ e existe uma base de $E_A(\mu) \otimes \mathbb{C}^{2m}$ tal que*

$$\mathcal{J}|_{\mathcal{G}_{\mathcal{J}}(i\omega)} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_p. \quad (3.17)$$

Demonstração. Suponha que $\eta = 0$. Seja U_1 um elemento do núcleo de M_μ e U_2 é um autovetor generalizado de modo que $M_\mu U_2 = U_1$. Sabemos do Lema 3.20 que para todos os autovetores (linearmente independentes) V_1, \dots, V_p do autovalor μ de A , então $V_j \otimes U_1$ está no núcleo de

\mathcal{J} para $j = 1, \dots, p$. Assim, $M(V_j \otimes U_2) = V_j \otimes M_\mu U_2 = V_j \otimes U_1$ implica que $\text{span}\{V_j \otimes U_1, V_j \otimes U_2\} \subset G_{\mathcal{J}}(0)$ para cada $j = 1, \dots, p$. Suponha que $W_1 \otimes W_2 \in G_{\mathcal{J}}(0) \subset E_A(\mu) \otimes \mathbb{C}^{2m}$ em que $W_1 = \alpha_1 V_1 \oplus \dots \oplus \alpha_p V_p \in E_A(\mu)$. Então, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{J}^r(W_1 \otimes W_2) = \sum_{j=1}^p \alpha_j V_j \otimes M_\mu^r W_2 = 0$$

exige $M_\mu^r W_2 = 0$ por independência linear de V_1, \dots, V_p . Mas isso significa $r = 2$ pois o autovalor 0 de M_μ tem multiplicidade algébrica 2 e daí, $W_2 \in \text{span}\{U_1, U_2\}$. Assim,

$$G_{\mathcal{J}}(0) = \bigoplus_{j=1}^p \text{span}\{V_j \otimes U_1, V_j \otimes U_2\}$$

o que mostra o isomorfismo. A prova procede da mesma forma no caso $\eta = i\omega$. Seja U_1 um autovetor de $i\omega$ e U_2 um autovetor generalizado. A matriz M_μ restrita a $\{\text{Im}(U_1), \text{Re}(U_1), \text{Im}(U_2), \text{Re}(U_2)\}$ tem a forma dada pela matriz de ordem 4 em (3.17). Mais uma vez, seja V_1, \dots, V_p uma base de $E_A(\mu)$ e considere os vetores $\{V_j \otimes \text{Im}(U_1), V_j \otimes \text{Re}(U_1), V_j \otimes \text{Im}(U_2), V_j \otimes \text{Re}(U_2)\}$ para $j = 1, \dots, p$. Então um cálculo similar ao anterior garante que

$$G_{\mathcal{J}}(i\omega) = \bigoplus_{j=1}^p \text{span}\{V_j \otimes \text{Im}(U_1), V_j \otimes \text{Re}(U_1), V_j \otimes \text{Im}(U_2), V_j \otimes \text{Re}(U_2)\} \quad (3.18)$$

e por construção chegamos em (3.17). \square

Observação 3.29. A correspondência com o caso simétrico, conforme descrito em Golubitsky e Stewart [50] e Dellnitz *et al.* [27], pode ser vista a seguir. No caso de um autovalor zero, a decomposição na soma de duas cópias de $E_A(\mu)$ é análoga à decomposição do autoespaço de zero como duas representações absolutamente irredutíveis do grupo de simetria. Não existe um análogo ao caso não absolutamente irredutível. O caso de ressonância $1 : -1$ é análogo ao caso descrito no Teorema 4.4 (b) de [27], em que a soma dos autoespaços generalizados dos autovalores $\pm i\omega$ é a soma direta de quatro representações isomórficas absolutamente irredutíveis.

Observação 3.30. Observe que não há restrições na dimensão da célula para o caso de um autovalor zero, uma vez que o autoespaço generalizado obtido de M_μ é bidimensional e as células devem ter pelo menos dimensão 2. No entanto, para autovalores puramente imaginários, a dimensão da célula deve ser pelo menos 4 para ter a ressonância $1 : -1$ em M_μ .

O movimento genérico de autovalores para os dois casos do Teorema 3.28 segue diretamente dos desdobramentos versais existentes para as matrizes 2×2 e 4×4 , veja, por exemplo [27].

O desdobramento do autovalor zero é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_p$

o que significa que, genericamente, os autovalores se movem do eixo real para o eixo imaginário. Os autovalores se dividem conforme mostrado na Figura 3.4.

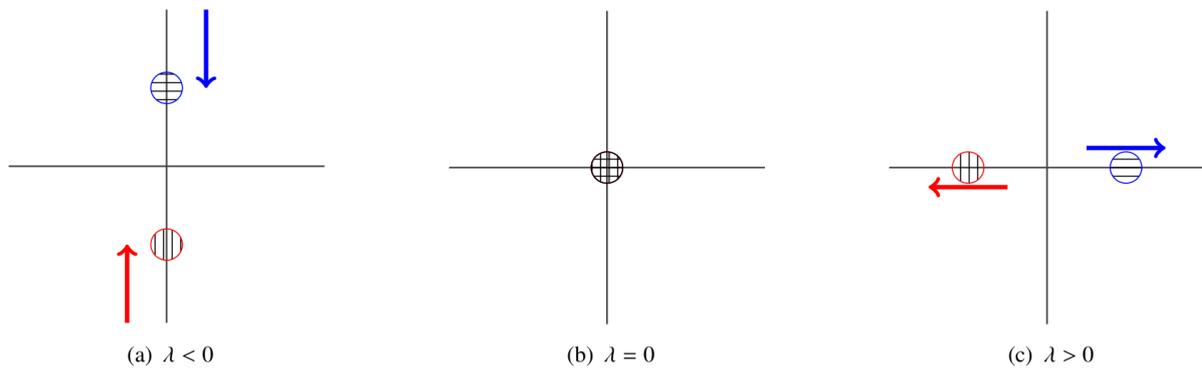


Figura 3.4: Movimento dos autovalores no plano complexo com respeito a um autovalor zero. (a) - (c) mostram os autovalores partindo do eixo imaginário à medida que $\lambda < 0$ transita para $\lambda > 0$.

Para a ressonância $1 : -1$, o desdobramento versal segue (3.17) e, genericamente, os autovalores se separam do eixo imaginário para formar um quarteto de Krein. Veja a Figura 3.5.

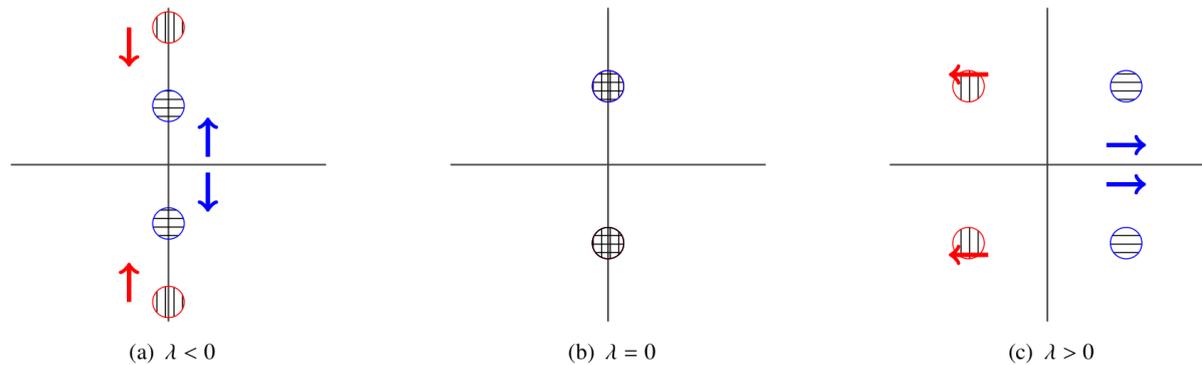


Figura 3.5: Movimento dos autovalores no plano complexo com respeito a uma ressonância $1 : -1$. (a) - (c) mostram os autovalores partindo do eixo imaginário à medida que $\lambda < 0$ transita para $\lambda > 0$.

3.4 Bifurcações de Equilíbrio com Codimensão Um

Apresentamos conforme [22] alguns resultados de bifurcação para famílias de 1-parâmetro de redes regulares hamiltonianas. O segundo generaliza a versão hamiltoniana do Lema de Ramificação Equivariante para sistemas simétricos [50, 51] no caso de células acopladas, assim como o Teorema 2.25 faz no caso não hamiltoniano. O terceiro resultado é uma versão

hamiltoniana do Teorema de Hopf Equivariante para redes. Recordamos que, para um sistema hamiltoniano, o espaço de fase total é $P = (\mathbb{R}^{2m})^n$ e que, dada uma coloração balanceada \bowtie , então temos um subespaço de sincronia

$$\Delta_{\bowtie} = \{x \in P \mid x_c = x_d \iff c \bowtie d, \forall c, d \in \mathcal{C}\}.$$

Proposição 3.31 ([22, Proposição 4.1]). *Suponha que h seja a função hamiltoniana de uma rede hamiltoniana acoplada com o espaço de fase total P cuja matriz de adjacência é simétrica. Se Δ é um subespaço de sincronia, então Δ é um subespaço simplético. Em particular, $h|_{\Delta}$ é uma função hamiltoniana para o campo vetorial F_h restrito a Δ .*

Demonstração. A estrutura hamiltoniana da rede implica a existência de uma forma simplética $\Omega : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$. Ou seja, Ω é bilinear, anti-simétrica e não degenerada (para mais detalhes, veja o Apêndice B). Considerando um mapa quociente $\phi_{\bowtie} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\bowtie}$ como na Proposição 1.37, podemos definir um mapa quociente $\pi : P \rightarrow P_{\bowtie}$ de modo que P_{\bowtie} e Δ_{\bowtie} sejam bijetivamente relacionados.

Suponha que $u, v, w, z \in P$ sejam tais que $\pi(u) = \pi(w)$ e $\pi(v) = \pi(z)$. Afirmamos que $\Omega(u, v) = \Omega(w, z)$, ou seja, Ω é constante nas classes de \bowtie -equivalência. Portanto, podemos definir $\bar{\Omega} : P_{\bowtie} \times P_{\bowtie} \rightarrow \mathbb{R}$ como a restrição de Ω para as classes de equivalência e $\bar{\Omega}$ ainda é bilinear, anti-simétrica e não-degenerada. Isso significa que $\bar{\Omega}$ está bem definida e é uma forma simplética em Δ_{\bowtie} . A forma simplética em P é definida como

$$\Omega(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{J}_k y_j$$

onde $\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_k \\ -\mathbf{I}_k & 0 \end{bmatrix}$. Sejam $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_r$ as partições de índices correspondendo a \bowtie . Escrevemos $\pi(x) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ onde \bar{x}_j é um representante da j -ésima classe de \bowtie -equivalência. Considere u, v, w, z como acima. É simples então verificar que

$$\Omega(u, v) = \sum_{i=1}^r n_i \bar{u}_i \mathbf{J}_k \bar{v}_i = \sum_{i=1}^r n_i \bar{w}_i \mathbf{J}_k \bar{z}_i = \Omega(w, z)$$

onde $n_i = |\mathcal{I}_i|$ é a cardinalidade de \mathcal{I}_i . Definimos $\bar{h} = h|_{\Delta}$ a função hamiltoniana de $\bar{F}_h = F_h|_{\Delta}$ usando a forma simplética $\bar{\Omega}(v, \bar{F}_h(u)) = d\bar{h}(u) \cdot v$ para todo $u \in \Delta$ e $v \in T_u \Delta$. \square

Escrevemos o campo vetorial F_h como $\dot{x} = F(x, \lambda)$ e assumimos que $F(0, 0) = 0$ como no Capítulo 2. Seja $\Delta_{sync} = \{x \mid x_i = x_j, \forall i, j\}$ o subespaço total de sincronia. Suponha que $dF(0, 0)$ tenha um autovalor zero não-semisimples com multiplicidade 2.

Queremos considerar bifurcações que quebram a sincronia e, por isso, assumimos que K , o autoespaço generalizado de 0 é tal que $K \cap \Delta_{sinc} = \{0\}$. Isso significa que podemos assumir que $(0, \lambda)$ seja um equilíbrio trivial para λ próximo de 0.

Teorema 3.32 ([22, Teorema 4.2]). *Seja Δ um subespaço de sincronia tal que $\dim(\Delta \cap K) = 2$. Então, $\Delta \cap K$ é simplético e o campo vetorial F_h restrito a $\Delta \cap K$ é hamiltoniano.*

Demonstração. O autoespaço generalizado do autovalor de uma matriz hamiltoniana é um espaço simplético e a interseção de subespaços simpléticos também é um subespaço simplético. A afirmação sobre F_h segue como descrito no parágrafo anterior. Em particular, sendo um hamiltoniano com um grau de liberdade, a bifurcação dos equilíbrios pode ser obtida de maneira direta, (veja [21]). \square

Exemplo 3.33. Considere a rede \mathcal{G}_2 mostrada a seguir ao lado de sua matriz de adjacência A_2 .

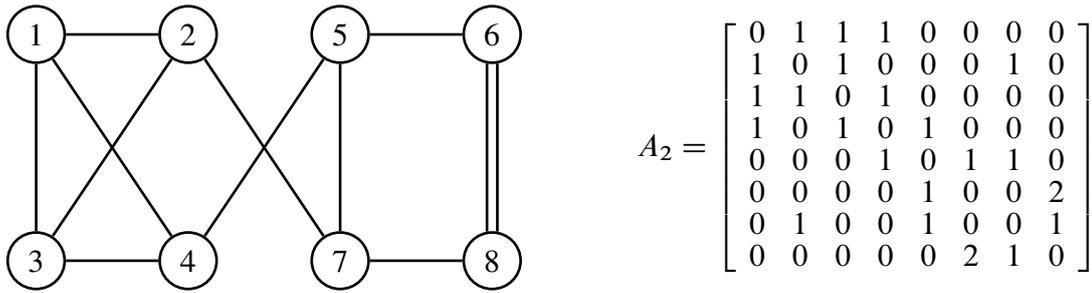


Figura 3.6: Rede regular não-direcionada de 8 células com simetria \mathbb{Z}_2 e sua matriz de adjacência.

Observe que essa rede possui apenas uma simetria de reflexão \mathbb{Z}_2 gerada pela permutação $(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$. Os autovalores de A_2 são $3, -1 \pm \sqrt{3}, -1, -1$ e mais três autovalores simples um tanto longos para serem expressos aqui que chamaremos μ_1, μ_2 e μ_3 . Novamente, vemos aqui um autovalor de multiplicidade 2 decorrente da arquitetura da rede. Em particular, seja $V_1 = (1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, 1)^\top$ e $V_2 = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)^\top$, então $A_2 V_i = -V_i$ para $i = 1, 2$. Seguindo as duas colorações para \mathcal{G}_2 como ilustrado na Figura 3.7, temos dois subespaços de sincronia Δ_1 e Δ_2 . Em coordenadas, temos $\Delta_1 = \{(a, b, b, a, b, b, a, a) \mid a, b \in \mathbb{R}^k\}$ e $\Delta_2 = \{(a, a, b, b, a, a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^k\}$.

Suponha que M_{-1} tenha um autovalor zero de multiplicidade 2 com autoespaço generalizado gerado por U_1 e U_2 . Então, $K = \text{span}\{U_1 \otimes V_1, U_2 \otimes V_1, U_1 \otimes V_2, U_2 \otimes V_2\}$. Mudando de base, pode-se ver que $V_1 \otimes U_i = (U_i, -U_i, -U_i, U_i, -U_i, -U_i, U_i, U_i)^\top \in \Delta_1$ e $V_2 \otimes U_i = (U_i, U_i, -U_i, -U_i, U_i, U_i, -U_i, -U_i)^\top \in \Delta_2$ para $i = 1, 2$. Assim, em ambos os casos, $\dim(K \cap \Delta_j) = 2$ para $j = 1, 2$ e o Teorema 3.32 se aplica, de modo que temos uma bifurcação em cada subespaço. Observe que a simetria \mathbb{Z}_2 da rede preserva Δ_{sinc} .

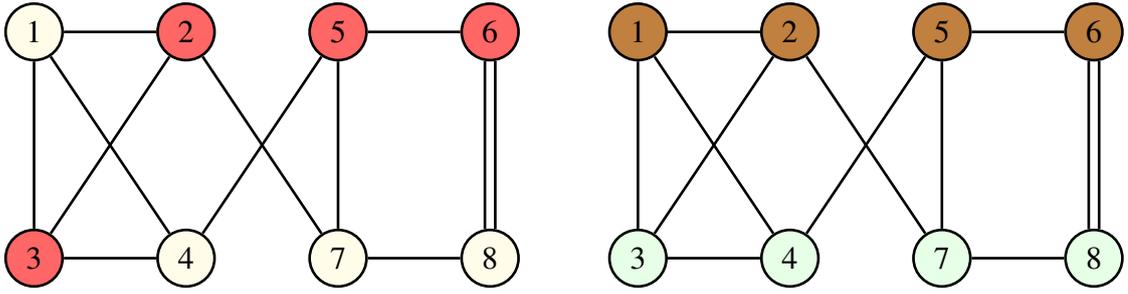


Figura 3.7: Colorações balanceadas não-triviais da rede de 8 células \mathcal{G}_2 correspondentes aos subespaços de sincronia Δ_1 (esquerda) e Δ_2 (direita).

Podemos obter um resultado análogo ao Teorema 3.32 no caso de autovalores puramente imaginários e, assim, obter uma versão do Teorema de Hopf Hamiltoniano para redes de células acopladas hamiltonianas. O Teorema de Hopf Hamiltoniano foi estabelecido em completa generalidade por van der Meer [89, Teorema 4.11] e pode ser visto em [65, Teorema 8.8] ou [66, Teorema 11.5.1]. Para um sistema hamiltoniano em \mathbb{R}^4 com ressonância $1 : -1$, as soluções periódicas podem ser obtidas estudando o sistema hamiltoniano dado por

$$h(x, y) = S + N + \lambda P + \mathbf{a}P^2,$$

$$S = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad N = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad P = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2).$$

Em particular, o sinal do coeficiente \mathbf{a} determina o cenário de bifurcação: se $\mathbf{a} > 0$, as soluções periódicas entram em colapso na origem quando o parâmetro $\lambda \rightarrow 0^-$ e para $\mathbf{a} < 0$, há duas famílias de soluções periódicas distintas que se cruzam na origem e se afastam da origem quando λ torna-se negativo. Suponha que $dF(0, 0)$ tem autovalores $\pm i\omega$ em ressonância $1 : -1$ e E é o respectivo autoespaço generalizado.

Teorema 3.34 ([22, Teorema 4.4]). *Considere uma família de 1-parâmetro numa rede hamiltoniana de células acopladas com um equilíbrio na origem. Suponha que a linearização na origem tenha uma ressonância $1 : -1$ com autoespaço E . Seja Δ um subespaço de sincronia tal que $\dim(\Delta \cap E) = 4$. Seja \mathbf{a}_Δ o coeficiente da forma normal de h_0 em $\Delta \cap E$. Então, desde que $\mathbf{a}_\Delta \neq 0$, os mesmos dois cenários ocorrem como no Teorema de Hopf Hamiltoniano tradicional para $\mathbf{a} < 0$ e $\mathbf{a} > 0$ acima descritos.*

Demonstração. O subespaço $\Delta \cap E$ é um subespaço simplético fluxo-invariante e o campo vetorial $F_h|_{\Delta \cap E}$ é 4-dimensional enquanto a linearização na origem tem ressonância de $1 : -1$. Portanto, a função hamiltoniana $h|_{\Delta \cap E}$ é uma função de S , N e P conforme descrito no parágrafo acima e assim, o sistema sofre uma bifurcação de Hopf Hamiltoniana em Δ . \square

Exemplo 3.35. Voltando ao Exemplo 3.33, seja $E = G_{\mathcal{J}}(i\omega)$ seja dado por 3.18 com V_1 e V_2 como acima. Suponha que U_1, U_2 sejam respectivamente o autovetor e o autovetor generalizado de $i\omega$. Novamente mudando de base, pode-se verificar que

$$\text{span}\{V_1 \otimes \text{Im}(U_1), V_1 \otimes \text{Re}(U_1), V_1 \otimes \text{Im}(U_2), V_1 \otimes \text{Re}(U_2)\} \subset \Delta_1$$

$$\text{span}\{V_2 \otimes \text{Im}(U_1), V_2 \otimes \text{Re}(U_1), V_2 \otimes \text{Im}(U_2), V_2 \otimes \text{Re}(U_2)\} \subset \Delta_2.$$

Portanto, o Teorema 3.34 nos diz que em cada subespaço da sincronia, existem famílias de soluções periódicas, dependendo do sinal do coeficiente \mathbf{a} , conforme descrito no parágrafo anterior ao Teorema 3.34.

Exemplo 3.36. Considere a rede \mathcal{G}_3 de valência 4 mostrada na Figura 3.8.

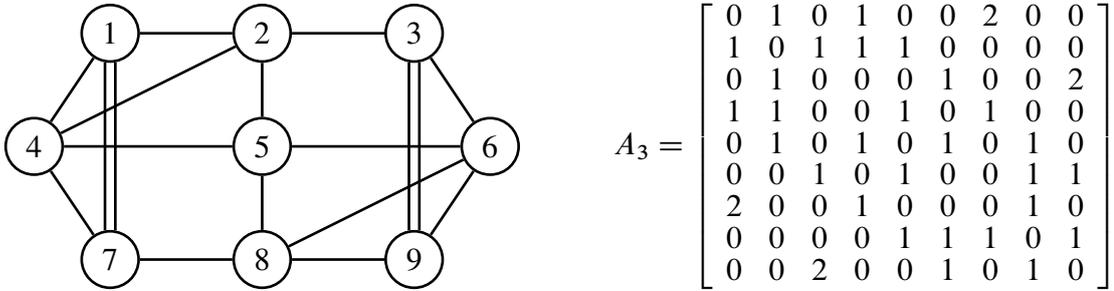


Figura 3.8: Rede regular não-direcionada de 9 células com simetria \mathbb{D}_2 e sua matriz de adjacência.

Note que \mathcal{G}_3 tem grupo de simetria abeliano \mathbb{D}_2 gerado pelas reflexões $(2\ 6)(1\ 9)(4\ 8)$ e $(2\ 4)(3\ 7)(6\ 8)$. A matriz de adjacência A_3 possui autovalores simples $4, \pm 2\sqrt{2}$ e autovalores $\pm 1, -2$ com multiplicidade 2. Novamente, como o grupo é abeliano, notamos que os autovalores de multiplicidade 2 não são consequência da simetria mas da arquitetura da rede. Designadamente, os autovetores de -2 são $V_1 = (1, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1)^T$ e $V_2 = (0, 1, -1, 1, -2, 1, -1, 1, 0)^T$.

Os subespaços de sincronia $\Delta_1 = \{(a, b, c, b, d, b, c, b, a) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^k\}$ e $\Delta_2 = \{(a, b, a, c, d, c, a, b, a) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^k\}$ são ilustrados na Figura 3.9.

Como descrito, se $i\omega$ ocorre a partir da matriz M_μ onde μ é um dos autovalores de multiplicidade 2 de A_3 , digamos, $\mu = -2$ então tomando U_1 e U_2 como autovetor e autovetor generalizado de σ , respectivamente, por 3.18 vemos que $E = G_{\mathcal{J}}(i\omega) \subset \Delta_1$ pois $V_1, V_2 \in \Delta_1$ como pode ser verificado. Portanto, o Teorema 3.34 nos diz que existem famílias de soluções periódicas, conforme descrito no parágrafo anterior ao Teorema 3.34 que exibem o padrão de sincronização de Δ_1 .

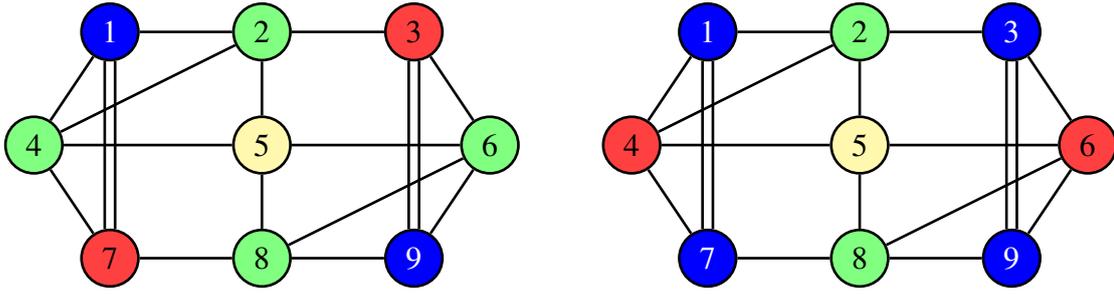


Figura 3.9: Colorações balanceadas não-triviais da rede de 9 células \mathcal{G}_3 correspondentes aos subespaços de sincronia Δ_1 (esquerda) e Δ_2 (direita).

3.4.1 Teorema do Centro de Lyapunov para Redes Hamiltonianas

Finalizamos este capítulo considerando uma extensão do Teorema do Centro de Lyapunov para o caso de redes hamiltonianas. Esse resultado descreve a existência de uma família de órbitas periódicas na vizinhança de uma solução de equilíbrio com um par de autovalores puramente imaginários não-ressonantes tais que a frequência da família de órbitas converge para a frequência dada pelo autovalor puramente imaginário (veja Meyer *et al.* [66, Seção 9.2]).

Seja $\dot{x} = F(x)$ e, assim como na Seção 2.2.1, assumamos $F(0) = 0$. Relembrando [66, Proposição 3.3.1] onde autovalores de matrizes hamiltonianas reais se apresentam em quartetos, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.37. *Suponha que $dF(0)$ tem um par de autovalores puramente imaginários $\lambda_1 = i\omega$ em M_μ de modo que todos os demais autovalores λ (exceto por $\bar{\lambda}_1$) são não-ressonantes; ou seja, $\lambda \neq k\lambda_1$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. Seja E o autoespaço de $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$ e Δ um subespaço de sincronia tal que $\dim(\Delta \cap E) = 2$. Então, existe uma família de órbitas periódicas de 1-parâmetro γ_ε para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ em $\Delta \cap E$ formando uma variedade suave 2-dimensional de órbitas periódicas contendo o equilíbrio $x = 0$ e tais que o período de γ_ε converge para $2\pi/\omega$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. As hipóteses do enunciado garantem que o subsistema hamiltoniano restrito ao subespaço de sincronia Δ satisfazem as hipóteses do Teorema do Centro de Lyapunov convencional [66, Teorema 9.2.1]. Assim, a conclusão segue imediatamente. \square

Exemplo 3.38. De volta ao Exemplo 3.36, suponhamos que $\lambda_1 = i\omega \in M_{-1}$ com autovetor complexo U_1 . O autovalor -1 de A_3 tem autovetor $W_1 = (0, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0) \in \Delta_2$. Então

$$\text{span}\{W_1 \otimes \text{Im}(U_1), W_1 \otimes \text{Re}(U_1)\} \subset \Delta_2$$

e assim, as órbitas periódicas seguem o padrão de sincronização ilustrado na Figura 3.9 (direita).

Capítulo 4

PERSPECTIVAS DE APLICAÇÕES

Sistemas de células acopladas podem ser estudados sob vários aspectos importantes de maneira sistemática através de técnicas teóricas de rede. Em particular, há técnicas desenvolvidas e usadas para redes com estruturas gradiente e hamiltoniana. Veja, por exemplo, [16, 64, 71] para redes gradientes e [19, 22, 88] para redes hamiltonianas, bem como suas referências. Esses dois tipos de estruturas atraem atenção em muitas direções diferentes. Enumeramos abaixo alguns contextos em que uma dessas estruturas se encaixa. No entanto, existem alguns sistemas biológicos modelados por redes que apresentam as duas estruturas, ou seja, redes neurais dadas por duas sub-redes de neurônios excitatórios e inibitórios (Seção 4.1).

Alguns outros contextos de possíveis aplicações de nossos resultados são os seguintes:

- (i) Muitas propriedades de um sistema do tipo Lotka-Volterra podem ser expressas geometricamente em termos de sua rede associada. Volterra introduziu o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}_j = \epsilon_j x_j + \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

como modelo para a competição de n espécies biológicas. Neste modelo, x_j representa o número de indivíduos da espécie j , os termos a_{jk} são os coeficientes de interação (entradas da matriz de adjacência) e os ϵ_j são parâmetros que dependem do ambiente. Os autores em [33] provam que em um conjunto fluxo-invariante existe um atrator global e a dinâmica do atrator é hamiltoniana.

- (ii) A dinâmica das equações de Lotka-Volterra com um hiperplano invariante é investigada em [71]. É mostrado que a dinâmica depende se a dimensão do espaço de fase é par ou ímpar. Enquanto no caso da dimensão par a dinâmica é hamiltoniana (no que diz respeito a uma estrutura de Poisson escolhida adequadamente), para dimensões ímpares a dinâmica é semelhante ao gradiente, devido à existência de uma função potencial global.

- (iii) As redes tratadas em [69] estão na mesma classe que consideramos aqui, ou seja, associadas a uma rede com apenas um tipo de célula e um tipo de acoplamento bidirecional entre as células. O campo vetorial é do tipo *acoplado à diferenças* onde sincronia e anti-sincronia são estudadas. Para esse tipo de sistema, as células têm a mesma dinâmica interna e o acoplamento entre as células é idêntico, simétrico e depende apenas da diferença de estados das células que interagem entre si. Se V denota o espaço de configuração de cada célula, estes são dados por um campo vetorial $f : V^n \rightarrow V^n$ de modo que as funções componentes $f_i : V^n \rightarrow V, i = 1, \dots, n$, são da forma

$$f_i(x) = \alpha(x_i) + \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} \delta(x_j - x_i),$$

para algum $\alpha, \delta : V \rightarrow V$ onde \mathcal{E} é o conjunto de arestas da rede.

- (iv) Relacionado às redes descritas no item anterior, existem campos vetoriais para os quais o interesse também reside no comportamento das diferenças de fase entre os estados vetoriais unitários planares das células acopladas. Isso leva a uma simetria \mathbb{S}_1 extra, implicando que as auto-conexões neste caso são triviais. Funções deste tipo aparecem em muitas aplicações, incluindo o modelo de Kuramoto (consulte [16,67] e o modelo XY antiferromagnético [60,62,91]. Existência e estabilidade dos equilíbrios nesses sistemas são investigadas em [64].

4.1 Redes Neurais com Acoplamento Sináptico Excitatório e Inibitório

Em termos simples, existem dois tipos de neurônios no cérebro, ou seja, aqueles que aumentam a atividade em outras células (neurônios excitatórios) e aqueles que diminuem a atividade (neurônios inibitórios); veja [28]. Além disso, essa interação e o comportamento dinâmico de um campo vetorial gradiente estão relacionados a mecanismos de aprendizagem artificial e processos de aprendizagem em redes neurais biológicas. Gafiychuk e Prykarpatsky [39] propõem um sistema de equações diferenciais polinomiais para modelar uma interação de excitação-inibição entre dois grupos de neurônios. Aqui seguimos a mesma ideia de decompor o campo vetorial governante em uma parte gradiente e uma hamiltoniana. Utilizamos nossos resultados para apresentar a forma geral do campo vetorial. Como veremos, isso depende das condições das funções de geração potencial e hamiltoniana combinadas à arquitetura da rede neural.

Assumimos que os neurônios dentro de cada grupo sejam idênticos com sinapses idênticas do tipo gradiente, e as sinapses entre neurônios de grupos distintos são hamiltonianas e todas idênticas. Uma rede neural esquemática desse tipo é dada por um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, em que cada

vértice representa um neurônio e cada aresta representa uma sinapse. Seja V_1, V_2 os conjuntos de vértices representando n neurônios excitatórios e m inibidores, respectivamente, $n, m \geq 1$. Seja E_1 o conjunto de arestas que representam as sinapses dentro de V_1 e E_2 dentro de V_2 . A matriz de adjacência deste grafo é uma matriz de ordem $n + m$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{G_1} & A_H \\ A_H^T & A_{G_2} \end{bmatrix}$$

onde $A_{G_1} = (a_{ij}^{G_1})$ e $A_{G_2} = (a_{ij}^{G_2})$ são as matrizes de adjacência dos subgrafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, respectivamente, e A_H é a matriz de adjacências entre os vértices de V_1 e V_2 . A Figura 4.1 representa esquematicamente os dois grupos em duas camadas.

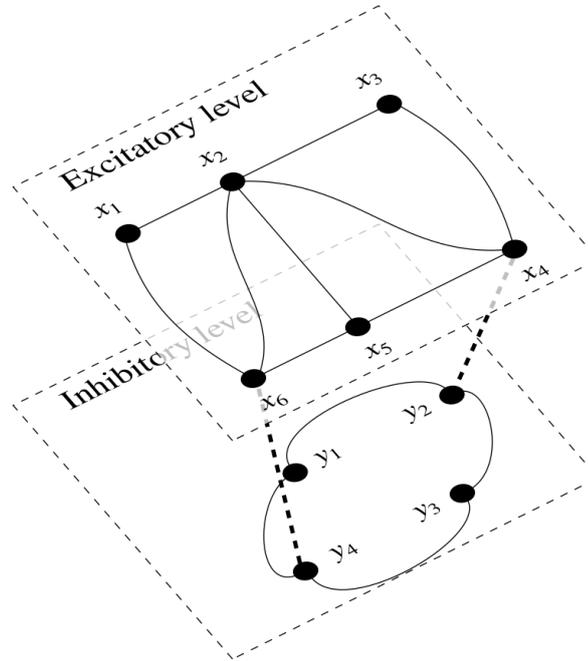


Figura 4.1: Uma rede esquemática de duas camadas de neurônios de tipos gradientes (linhas contínuas) com acoplamento hamiltoniano entre grupos (linhas tracejadas). Reproduzido de [2].

O sistema geral de equações diferenciais ordinárias definidas em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é dado por

$$(\dot{x}, \dot{y})^T = -\nabla f(x, y) + \mathbf{J}\nabla h(x, y), \quad (4.1)$$

onde \mathbf{J} é a transformação anti-simétrica com forma matricial

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & A_H \\ -A_H^T & 0 \end{bmatrix}$$

Se $a_{ij}^H \neq 0$, o par (x_i, y_j) é uma sinapse hamiltoniana, que é (q_k, p_k) , para algum k . Deste modo, a soma dos acoplamentos na expressão (3.12) é escrita aqui como

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^H \beta_H(x_i, y_j),$$

sem restrições na função de acoplamento β_H . Segue dos Teoremas 3.6 e 3.12 que a função geradora para essa rede é $g = f + h$, onde

$$f(x, y) = \sum_{i \leq k}^n a_{ik}^{G_1} \beta_{G_1}(x_i, x_k) + \sum_{j \leq l}^m a_{jl}^{G_2} \beta_{G_2}(y_j, y_l) + \sum_{i=1}^n \alpha_1(x_i) + \sum_{j=1}^m \gamma_1(y_j)$$

e

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^H \beta_H(x_i, y_j) + \sum_{i=1}^n \alpha_2(x_i) + \sum_{j=1}^m \gamma_2(y_j),$$

com as condições de invariância sob permutação de variáveis nas duas funções de acoplamento β_{G_1} e β_{G_2} , conforme indicado nos dois teoremas.

Segue que a configuração de excitação-inibição ocorre nesse modelo se as sinapses entre os grupos forem suficientemente mais fortes que as sinapses interiores. Por exemplo, considere a rede dada na Figura 4.1. A estrutura do grafo dessa rede implica que β_{G_1} e β_{G_2} são invariantes sob permutação de variáveis, portanto a função geradora é da forma

$$g(x, y) = a(x_1x_2 + x_1x_6 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6) + \\ + b(y_1y_2 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_3y_4) + \sum_{i=1}^6 \alpha x_i^2 + \sum_{j=1}^4 \beta y_j^2 + c(x_4, y_2 + x_6, y_4) + o^2(x, y),$$

para a, b, c, α, β constantes. A configuração de excitação-inibição aparece nesse modelo se, por exemplo,

$$\alpha = \beta = 1, \quad a, b, c \ll 1.$$

Como apontado em [5], as atividades síncronas dos neurônios são conduzidas através da conectividade sináptica dos neurônios excitatórios e inibitórios, e para entender como as redes neurais geram esses ou mais padrões complexos de atividade subjacentes a comportamentos, é necessário entender tanto os padrões específicos de conectividade entre os neurônios e como os neurônios individuais respondem às entradas que recebem. No modelo teórico descrito, a sincronização é realizada a partir de sua estrutura gráfica. Os padrões de sincronia nas redes excitadoras-inibidoras são derivados de quocientes de grafos que suportam estruturas gradiente e hamiltoniana, e são precisamente aqueles definidos a partir de relações de equivalência balanceada nos conjuntos de vértices cujas classes de equivalência têm a mesma cardinalidade pelo Teorema 2.9. Como consequência direta, na rede apresentada na Figura 4.1, os neurônios excitatórios e inibitórios sincronizam-se em pares, $x_1 = x_3, x_4 = x_6$ e $y_1 = y_3, y_2 = y_4$.

4.2 O Problema Restrito dos Três Corpos

O problema dos 3 corpos é relativamente simples de estabelecer: 3 partículas movem-se no espaço sobre a influência de sua atração gravitacional mútua; dadas as condições iniciais, determine seus movimentos subsequentes. Esse é um exemplo de problema matemático simples de propôr e difícil de resolver. Assim sua forma simplificada, chamada problema restrito dos 3 corpos (PR3C), é considerada em mecânica celeste. Nessa formulação, 2 dos corpos (chamados de primárias) giram em torno de seus centros de massa em órbitas circulares sobre a influência de sua atração gravitacional mútua formando um sistema de 2 corpos cujo movimento é conhecido. Um terceiro corpo (geralmente um asteróide, uma espação ou um satélite) tem massa desprezível. Isso significa que este não perturba o movimento das primárias enquanto é gravitacionalmente influenciado por elas, providenciando uma boa aproximação para situações físicas reais e foi usado como modelo em vários estudos.

Com sua formulação das leis de movimento, a lei da gravitação universal e sua solução do problema de 2 corpos, Newton pôde explicar as três leis de Kepler no movimento de Marte e outros planetas. Quando ele passou a dar atenção ao sistema Sol-Terra-Lua, sua incapacidade de resolver esse problema de 3 corpos o fez comentar ao astrônomo John Machin que “sua cabeça nunca havia doído como em seus estudos sobre a lua”¹. Em 1890, Poincaré mostrou que o problema de 3 corpos completo é um exemplo de dinâmica caótica que não pode ser resolvido por expressões algébricas e integrais.

Para o PR3C de acordo com [66, Seção 4.1], sejam $\mu > 0$ e $1 - \mu > 0$ as massas das primárias. Sejam $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ as coordenadas da partícula infinitesimal num sistema de coordenadas circulares e $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ o momento conjugado a (q_1, q_2) . O sistema de coordenadas circulares é escolhido de modo que o corpo de massa μ está sempre em $(1 - \mu, 0)$ e o corpo de massa $1 - \mu$ está em $(-\mu, 0)$. O hamiltoniano que governa o movimento da partícula infinitesimal nessas coordenadas é dado por

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{\mu}{\sqrt{(q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2}} - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(q_1 + \mu)^2 + q_2^2}}. \quad (4.2)$$

Considerando a expressão do auto-potencial dada por

$$U = \frac{\mu}{d_1} + \frac{1 - \mu}{d_2}, \quad (4.3)$$

onde d_i é a distância da partícula para a i -ésima primária, podemos escrever (4.2) como o sistema

¹ Manuscrito de Newton na coleção de Keynes, King's College, Cambridge, UK. MSS 130.6, Livro 3; 130.5

de equações

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= p_1 + q_2 \\
 \dot{q}_2 &= p_2 - q_1 \\
 \dot{p}_1 &= p_2 + \frac{\partial U}{\partial q_1} \\
 \dot{p}_2 &= -p_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Observe que este é um SCA compatível com a rede da Figura 3.1.

Outra expressão importante é a do potencial generalizado do PR3C dada por

$$V = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + U(q_1, q_2). \tag{4.5}$$

Se assumirmos ξ_1 e ξ_2 como pontos críticos de (4.5), podemos estudar um possível equilíbrio introduzindo novas coordenadas com

$$\begin{aligned}
 u_1 &= q_1 - \xi_1, & v_1 &= p_1 - \xi_2, \\
 u_2 &= q_2 - \xi_2, & v_2 &= p_2 - \xi_1.
 \end{aligned}$$

Essa mudança de coordenadas é claramente simplética, de modo que podemos aplicá-la ao hamiltoniano (4.2) e preservar sua estrutura. Expandindo em termos de segunda ordem nas novas variáveis, obtemos

$$H(u, v) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + u_2 v_1 - u_1 v_2 - \frac{1}{2}(U_{q_1 q_1} u_1^2 + 2U_{q_1 q_2} u_1 u_2 + U_{q_2 q_2} u_2^2) + \dots.$$

Não há termos lineares pois a expansão é realizada num equilíbrio e o termo constante foi omitido por não contriur para o sistema de equações. Lembrando que o sistema original não é completamente conservativo pois possui uma força que depende da velocidade da partícula, a chamada *força de Coriolis*. Contudo, no potencial generalizado em questão, podemos assumir a velocidade nula por se tratar de um equilíbrio e o sistema será conservativo. O hamiltoniano quadrático acima fornece a matriz hamiltoniana

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 \\
 U_{q_1 q_1} & U_{q_1 q_2} & 0 & 0 \\
 U_{q_1 q_2} & U_{q_2 q_2} & -1 & 0
 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Os autovalores dessa matriz determinam o comportamento do sistema linearizado. O polinômio característico é

$$\lambda^4 + (4 - V_{q_1 q_1} - V_{q_2 q_2})\lambda^2 + V_{q_1 q_1} V_{q_2 q_2} - V_{q_1 q_2}^2 = 0$$

onde as derivadas parciais são

$$V_{q_1 q_1} = 1 + (1 - \mu) \frac{3(q_1 + \mu)^2 - d_1^2}{d_1^5} + \mu \frac{3(q_1 + \mu - 1)^2 - d_2^2}{d_2^5}$$

$$V_{q_1 q_2} = 3q_1 q_2 \left(\frac{1 - \mu}{d_1^5} + \frac{\mu}{d_2^5} \right),$$

$$V_{q_2 q_2} = 1 + (1 - \mu) \frac{3q_2^2 - d_1^2}{d_1^5} + \mu \frac{3q_2^2 - d_2^2}{d_2^5}$$

e precisam ser calculadas a partir de pontos críticos.

Um resultado conhecido é que existem cinco pontos de equilíbrio, conhecidos por *pontos de Lagrange*: as três soluções de Euler que são colineares em relação às primárias (L_1 , L_2 e L_3) e as duas soluções de Lagrange que formam um triângulo equilátero com as primárias (L_4 e L_5). Enquanto as soluções de Euler são sabidamente instáveis, as soluções de Lagrange são estáveis. Lagrange pensou que essas soluções não tinham significância astronômica mas no Século XX centenas de asteróides, os Troianos, foram encontrados oscilando ao redor de L_4 no sistema Sol-Júpiter, assim como outro conjunto, os Gregos, foi encontrado oscilando ao redor de L_5 . Ou seja, um grupo de asteróides, o sol e Júpiter formam aproximadamente um triângulo equilátero (veja a Figura 4.2).

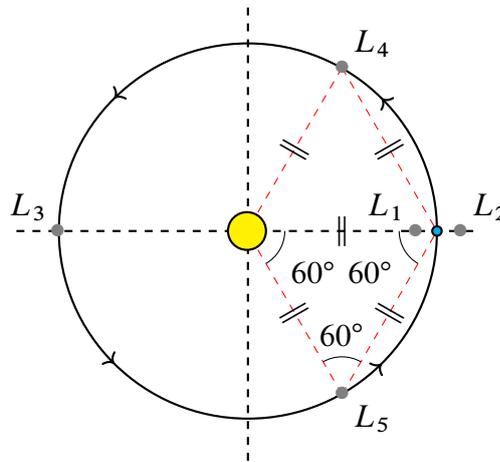


Figura 4.2: Ilustração dos cinco pontos de Lagrange com relação ao sistema Sol-Júpiter.

Como as coordenadas de L_4 foram estabelecidas para ser $\xi_1 = \frac{1}{2} - \mu$ e $\xi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, as derivadas parciais de V podem ser explicitamente calculadas. Elas são

$$V_{q_1 q_1} = \frac{3}{4}, \quad V_{q_1 q_2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \quad V_{q_2 q_2} = \frac{9}{4}. \quad (4.7)$$

O polinômio característico de (4.6) assim torna-se

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \quad (4.8)$$

cujas raízes são

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} \right). \quad (4.9)$$

Quando a raiz quadrada acima é zero, obtemos o autovalor $\pm i\sqrt{2}/2$ com multiplicidade 2. Isso ocorre para $\mu = \mu_1 = (1 - \sqrt{69}/9)/2 \approx 0.0385$, conhecida como *proporção de Routh*. Por simetria, o mesmo vale para $1 - \mu_1$. Também vemos que a matriz (4.6) não é diagonalizável.

O autovalor $\pm i\sqrt{2}/2$, por ser imaginário puro, produz uma bifurcação de Hopf hamiltoniana em L_4 . Além disso, para parâmetros tais que $0 < \mu < \mu_1$, os autovalores são distintos números imaginários puros $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$, com $0 < \omega_2 < \omega_1$. Como $\pm i\omega_2/\pm i\omega_1$ é menor que 1 em módulo, o Teorema do Centro de Lyapunov, assim como seu análogo para redes (Teorema 3.37), implica que existem famílias de órbitas periódicas surgindo de L_4 com período próximo de $2\pi/\omega_1$ para todo μ tal que $0 < \mu < \mu_1$. Essa é a chamada *família de curto período*.

Defina agora μ_r como o valor de μ para o qual $\omega_1/\omega_2 = r$. Se $0 < \mu < \mu_1$ e $\mu \neq \mu_r$ para $r = 1, 2, \dots$, então o Teorema do Centro de Lyapunov implica na existência de uma família de órbitas periódicas surgindo de L_4 com período próximo de $2\pi/\omega_2$, a chamada *família de longo período* (veja a Figura 4.3).

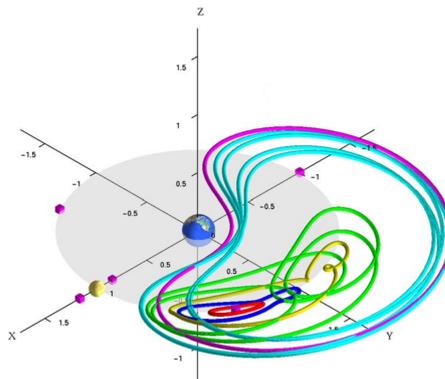


Figura 4.3: Ilustração da família de longo período em L_4 no sistema Terra-Lua gerada pelo software AUTO.

Vemos o quanto estudos de soluções periódicas do PR3C tem papel relevante em mecânica celeste. Esperamos que, com mais avanços nos estudos e novos resultados, a discussão sobre linearizações e bifurcações de equilíbrio feita nos Capítulos 2 e 3 possa auxiliar em modelos e problemas sofisticados como o PR3C e outros sistemas complexos.

REFERÊNCIAS

- [1] ABRAHAM, R., AND MARSDEN, J. E. *Foundations of Mechanics, Second Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, CA, Oct. 1987.
- [2] AGUIAR, M., DIAS, A., AND MANOEL, M. Gradient and Hamiltonian coupled systems on undirected networks. *Mathematical Biosciences and Engineering* 16, 5 (May 2019), 23.
- [3] AGUIAR, M. A., DIAS, A. P. S., GOLUBITSKY, M., AND LEITE, M. D. C. A. Bifurcations from regular quotient networks: A first insight. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 238, 2 (Jan. 2009), 137–155.
- [4] ALDIS, J. W. *On balance*. Phd Thesis, University of Warwick, 2010.
- [5] ALFORD, S. T., AND ALPERT, M. H. A synaptic mechanism for network synchrony. *Front Cell Neurosci* 8 (Sept. 2014).
- [6] ANTONELI, F. *Grupos finitos e quebra de simetria no código genético*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Jan. 2003.
- [7] ANTONELI, F., DIAS, A. P. S., AND PAIVA, R. C. Hopf Bifurcation in Coupled Cell Networks with Interior Symmetries. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 7, 1 (Jan. 2008), 220–248.
- [8] ANTONELI, F., GOLUBITSKY, M., AND STEWART, I. Homeostasis in a feed forward loop gene regulatory motif. *Journal of Theoretical Biology* 445 (May 2018), 103–109.
- [9] ARNOLD, V. I. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russ. Math. Surv.* 18, 5 (1963), 9–36.
- [10] AXLER, S. *Linear Algebra Done Right*, 3 edition ed. Springer, Springer International Publishing, Nov. 2016.
- [11] BOCCALETTI, S., PECORA, L., AND PELAEZ, A. Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 63 (July 2001), 066219.
- [12] BRANDT, H. Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. *Math. Ann.* 96, 1 (Dec. 1927), 360–366.
- [13] BRESSLOFF, P. C., COWAN, J. D., GOLUBITSKY, M., AND THOMAS, P. J. Scalar and pseudoscalar bifurcations motivated by pattern formation on the visual cortex. *Nonlinearity* 14, 4 (July 2001), 739–775.

- [14] BRESSLOFF, P. C., COWAN, J. D., GOLUBITSKY, M., THOMAS, P. J., AND WIENER, M. C. Geometric visual hallucinations, Euclidean symmetry and the functional architecture of striate cortex. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B* 356, 1407 (Mar. 2001), 299–330.
- [15] BRESSLOFF, P. C., COWAN, J. D., GOLUBITSKY, M., THOMAS, P. J., AND WIENER, M. C. What Geometric Visual Hallucinations Tell Us about the Visual Cortex. *Neural Computation* 14, 3 (Mar. 2002), 473–491.
- [16] BRONSKI, J. C., DEVILLE, L., AND JIP PARK, M. Fully synchronous solutions and the synchronization phase transition for the finite-N Kuramoto model. *Chaos* 22, 3 (Aug. 2012), 033133.
- [17] BROWN, R. From Groups to Groupoids: a Brief Survey. *Bulletin of the London Mathematical Society* 19, 2 (Mar. 1987), 113–134.
- [18] BUCKLEY, F., AND HARARY, F. *Distance in graphs*. Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City, Calif., 1990. OCLC: 19270992.
- [19] BUONO, P.-L., CHAN, B. S., PALACIOS, A., AND IN, V. Dynamics and bifurcations in a Dn-symmetric Hamiltonian network. Application to coupled gyroscopes. *Physica D: Nonlinear Phenomena Complete*, 290 (2015), 8–23.
- [20] BUONO, P. L., AND GOLUBITSKY, M. Models of central pattern generators for quadruped locomotion I. Primary gaits. *J Math Biol* 42, 4 (Apr. 2001), 291–326.
- [21] BUONO, P. L., LAURENT-POLZ, F., AND MONTALDI, J. Symmetric Hamiltonian Bifurcations. *London Math. Soc. Lecture Note Vol. 306* (2005), 357–402.
- [22] CHAN, B. S., BUONO, P. L., AND PALACIOS, A. Topology and bifurcations in Hamiltonian coupled cell systems. *Dynamical Systems* 32, 1 (Jan. 2017), 23–45.
- [23] COHEN, J., AND STEWART, I. *The Collapse of Chaos: Discovering Simplicity in a Complex World*. Penguin Books, New York, Apr. 1995.
- [24] COLLINS, J. J., AND STEWART, I. Hexapodal gaits and coupled nonlinear oscillator models. *Biol. Cybern.* 68, 4 (Feb. 1993), 287–298.
- [25] COLLINS, J. J., AND STEWART, I. N. Symmetry-breaking bifurcation: A possible mechanism for 2:1 frequency-locking in animal locomotion. *J. Math. Biol.* 30, 8 (Oct. 1992), 827–838.
- [26] COLLINS, J. J., AND STEWART, I. N. Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits. *J Nonlinear Sci* 3, 1 (Dec. 1993), 349–392.
- [27] DELLNITZ, M., MELBOURNE, I., AND MARSDEN, J. E. Generic bifurcation of Hamiltonian vector fields with symmetry. *Nonlinearity* 5, 4 (July 1992), 979–996.
- [28] DENAXA, M., NEVES, G., RABINOWITZ, A., KEMLO, S., LIODIS, P., BURRONE, J., AND PACHNIS, V. Modulation of Apoptosis Controls Inhibitory Interneuron Number in the Cortex. *Cell Rep* 22, 7 (2018), 1710–1721.
- [29] DIAS, A. P. S., AND RODRIGUES, A. Secondary bifurcations in systems with all-to-all coupling. Part II. *Dynamical Systems* 21, 4 (Dec. 2006), 439–463.

- [30] DIAS, A. P. S., AND STEWART, I. Symmetry Groupoids and Admissible Vector Fields for Coupled Cell Networks. *Journal of the London Mathematical Society* 69, 3 (June 2004), 707–736.
- [31] DIAS, A. P. S., AND STEWART, I. Linear equivalence and ODE-equivalence for coupled cell networks. *Nonlinearity* 18, 3 (2005), 1003.
- [32] DIONNE, B., GOLUBITSKY, M., AND STEWART, I. Coupled cells with internal symmetry: I. Wreath products. *Nonlinearity* 9, 2 (Mar. 1996), 559–574.
- [33] DUARTE, P., FERNANDES, R. L., AND OLIVA, W. M. Dynamics of the Attractor in the Lotka-Volterra Equations. *Journal of Differential Equations* 149 (Oct. 1998), 143–189.
- [34] ELMHIRST, T. *Symmetry and emergence in polymorphism and sympatric speciation*. Ph.D., University of Warwick, 2001.
- [35] ELMHIRST, T., AND GOLUBITSKY, M. Nilpotent Hopf Bifurcations in Coupled Cell Systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 5, 2 (Jan. 2006), 205–251.
- [36] EPSTEIN, I. R., AND GOLUBITSKY, M. Symmetric patterns in linear arrays of coupled cells. *Chaos* 3, 1 (Jan. 1993), 1–5.
- [37] ERMENTROUT, B., AND LEWIS, M. Pattern formation in systems with one spatially distributed species. *Bltm Mathcal Biology* 59, 3 (July 2004), 533–549.
- [38] FITZHUGH, R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophys J* 1, 6 (July 1961), 445–466.
- [39] GAFIYCHUK, V. V., AND PRYKARPATSKY, A. K. Pattern formation in neural dynamical systems governed by mutually Hamiltonian and gradient vector field structures. *Condensed Matter Physics Vol. 7*, 3 (July 2004), 551 – 563.
- [40] GOLUBITSKY, M., AND LAUTERBACH, R. Bifurcations from Synchrony in Homogeneous Networks: Linear Theory. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 8, 1 (Jan. 2009), 40–75.
- [41] GOLUBITSKY, M., PIVATO, M., AND STEWART, I. Interior symmetry and local bifurcation in coupled cell networks. *Dynamical Systems* 19, 4 (Dec. 2004), 389–407.
- [42] GOLUBITSKY, M., ROMANO, D., AND WANG, Y. Network periodic solutions: patterns of phase-shift synchrony. *Nonlinearity* 25, 4 (Apr. 2012), 1045–1074.
- [43] GOLUBITSKY, M., AND SCHAEFFER, D. G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume I. *SIAM Rev.* 28, 2 (June 1986), 271–272.
- [44] GOLUBITSKY, M., SHIAU, L., POSTLETHWAITE, C., AND ZHANG, Y. The Feed-Forward Chain as a Filter-Amplifier Motif. In *Coherent Behavior in Neuronal Networks*, K. Josic, J. Rubin, M. Matias, and R. Romo, Eds. Springer New York, New York, NY, 2009, pp. 95–120.
- [45] GOLUBITSKY, M., AND STEWART, I. Hopf bifurcation with dihedral group symmetry: coupled nonlinear oscillators. In *Multiparameter bifurcation theory (Arcata, Calif., 1985)*, vol. 56 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 131–173.

- [46] GOLUBITSKY, M., AND STEWART, I. Patterns of Oscillation in Coupled Cell Systems. In *Geometry, Mechanics, and Dynamics*, P. Newton, P. Holmes, and A. Weinstein, Eds. Springer New York, New York, NY, 2002, pp. 243–286.
- [47] GOLUBITSKY, M., AND STEWART, I. *The Symmetry Perspective: From Equilibrium to Chaos in Phase Space and Physical Space*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2002.
- [48] GOLUBITSKY, M., AND STEWART, I. Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 3 (2006), 305–364.
- [49] GOLUBITSKY, M., AND STEWART, I. Homeostasis, singularities, and networks. *J. Math. Biol.* 74, 1 (Jan. 2017), 387–407.
- [50] GOLUBITSKY, M., STEWART, I., AND MARSDEN, J. Generic bifurcation of Hamiltonian systems with symmetry. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 24, 1-3 (Jan. 1987), 391–405.
- [51] GOLUBITSKY, M., STEWART, I., AND SCHAEFFER, D. G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Volume II. *SIAM Review* 31, 4 (Dec. 1989), 703–704.
- [52] GOLUBITSKY, M., STEWART, I., AND TÖRÖK, A. Patterns of Synchrony in Coupled Cell Networks with Multiple Arrows. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 4, 1 (Jan. 2005), 78–100.
- [53] GOLUBITSKY, M., AND ZHAO, Y. The Symmetry of Generalized Rivalry Network Models Determines Patterns of Interocular Grouping in Four-Location Binocular Rivalry. 22.
- [54] GUCKENHEIMER, J., AND HOLMES, P. J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [55] HANSSMANN, H. *Local and Semi-Local Bifurcations in Hamiltonian Dynamical Systems: Results and Examples*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [56] HAYKIN, S. S. *Neural networks and learning machines*, 3rd ed ed. Prentice Hall, New York, 2009.
- [57] HIGGINS, P. J. Notes on categories and groupoids. *Van Nostrand Reinhold mathematical studies* 32 (1971), 178.
- [58] HIRSCH, M. W., AND SMALE, S. Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. In *Academic Press* (1974), vol. vol 60.
- [59] HURWITZ, A. Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt. *Math. Ann.* 46, 2 (June 1895), 273–284.
- [60] KORSHUNOV, S. E. Phase diagram of the antiferromagnetic XY model with a triangular lattice in an external magnetic field. *J. Phys. C: Solid State Phys.* 19, 29 (Oct. 1986), 5927–5935.
- [61] KURAMOTO, Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [62] LEE, D. H., CAFLISCH, R. G., JOANNOPOULOS, J. D., AND WU, F. Y. Antiferromagnetic classical XY model: A mean-field analysis. *Phys. Rev. B* 29, 5 (Mar. 1984), 2680–2684.

- [63] LEITE, M. D. C. A., AND GOLUBITSKY, M. Homogeneous three-cell networks. *Nonlinearity* 19, 10 (Oct. 2006), 2313–2363.
- [64] MANOEL, M., AND ROBERTS, M. Gradient systems on coupled cell networks. *Nonlinearity* 28, 10 (Aug. 2015), 3487.
- [65] MEISS, J. D. *Differential Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Jan. 2007.
- [66] MEYER, K., HALL, G., AND OFFIN, D. C. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, 2 ed. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 2009.
- [67] MIROLLO, R. E., AND STROGATZ, S. H. The spectrum of the locked state for the Kuramoto model of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 205, 1-4 (June 2005), 249–266.
- [68] NAGUMO, J., ARIMOTO, S., AND YOSHIZAWA, S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. *Proceedings of the IRE* 50, 10 (Oct. 1962), 2061–2070.
- [69] NEUBERGER, J. M., SIEBEN, N., AND SWIFT, J. W. Synchrony and Anti-Synchrony for Difference-Coupled Vector Fields on Graph Network Systems. *arXiv:1805.04144 [math]* (Mar. 2019). arXiv: 1805.04144.
- [70] PECORA, L. M., AND CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 64, 8 (Feb. 1990), 821–824.
- [71] PLANK, M. On the Dynamics of Lotka-Volterra Equations Having an Invariant Hyperplane. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 59, 5 (1999), 1540–1551.
- [72] POINCARÉ, H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1ère partie). *Journal de mathématiques pures et appliquées* 7 (1881), 375–422.
- [73] POINCARÉ, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 1. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1892.
- [74] POINCARÉ, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 2. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1892.
- [75] POINCARÉ, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 3. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1899.
- [76] ROUTH, E. J. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, Particularly Steady Motion, Being the Essay to which the Adams Prize was Adjudged in 1877, in the University of Cambridge*, by E.J. Routh, ... Macmillan, 1877. Google-Books-ID: sikipQwAACAAJ.
- [77] SMALE, S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 73, 6 (1967), 747–817.
- [78] STEWART, I. Self-Organization in Evolution: A Mathematical Perspective. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 361, 1807 (2003), 1101–1123.

- [79] STEWART, I. Speciation: a Case Study in Symmetric Bifurcation Theory. *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica* 41 (2003), 67–88.
- [80] STEWART, I. Elimination of multiple arrows and self-connections in coupled cell networks. *Int. J. Bifurcation Chaos* 17, 01 (Jan. 2007), 99–106.
- [81] STEWART, I. An optimal lifting theorem for coupled cell networks. *Int. J. Bifurcation Chaos* 21, 09 (Sept. 2011), 2481–2487.
- [82] STEWART, I. Synchrony-Breaking Bifurcation at a Simple Real Eigenvalue for Regular Networks 2: Higher-Dimensional Cells. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 13, 1 (Jan. 2014), 129–156.
- [83] STEWART, I., ELMHIRST, T., AND COHEN, J. Symmetry-Breaking as an Origin of Species. In *Bifurcation, Symmetry and Patterns*, J. Buescu, S. B. S. D. Castro, A. P. da Silva Dias, and I. S. Labouriau, Eds., Trends in Mathematics. Birkhäuser Basel, Basel, 2003, pp. 3–54.
- [84] STEWART, I., AND GOLUBITSKY, M. Synchrony-Breaking Bifurcation at a Simple Real Eigenvalue for Regular Networks 1: 1-Dimensional Cells. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 10, 4 (Jan. 2011), 1404–1442.
- [85] STEWART, I., AND GOLUBITSKY, M. Symmetric Networks with Geometric Constraints as Models of Visual Illusions. *Symmetry* 11, 6 (June 2019), 799.
- [86] STEWART, I., GOLUBITSKY, M., AND PIVATO, M. Symmetry Groupoids and Patterns of Synchrony in Coupled Cell Networks. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2, 4 (Jan. 2003), 609–646.
- [87] TOPP, B., PROMISLOW, K., DEVRIES, G., MIURA, R. M., AND FINEGOOD, D. T. A Model of β -Cell Mass, Insulin, and Glucose Kinetics: Pathways to Diabetes. *Journal of Theoretical Biology* 206, 4 (Oct. 2000), 605–619.
- [88] TOURIGNY, D. S. Networks of planar Hamiltonian systems. *Comm. in Non. Sci. and Num. Sim.* 53 (2017), 263–277.
- [89] VAN DER MEER, J. C. *The Hamiltonian Hopf Bifurcation*. Springer Verlag, Berlin ; New York, Dec. 1985.
- [90] VINCENT, T. L., AND VINCENT, T. L. S. Evolution and control system design. The evolutionary game. *IEEE Control Systems Magazine* 20, 5 (Oct. 2000), 20–35.
- [91] WALTER, J., AND CHATELAIN, C. Numerical investigation of the ageing of the fully frustrated XY model. *J. Stat. Mech.* 2009, 10 (Oct. 2009), P10017.
- [92] WANG, X. F. Complex networks: topology, dynamics and synchronization. *Int. J. Bifurcation Chaos* 12, 05 (May 2002), 885–916.
- [93] WATTS, D. J., AND STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature* 393, 6684 (June 1998), 440–442.
- [94] WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer Science & Business Media, Apr. 2006.
- [95] WILSON, R. J. *Introduction to Graph Theory*, 5 edition ed. Prentice Hall, Harlow, England, May 2010.

Apendice A

COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Recapitulamos aqui alguns conceitos e propriedades empregadas no Capítulo 2.

A.1 Autoespaços generalizados

Da Álgebra Linear [10], relembramos que, dada uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), um autovalor λ e o seu *autovetor generalizado* associado v são um par obedecendo a relação

$$(A - \lambda \mathbf{I})^m v = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde v é um vetor coluna $n \times 1$ não nulo, \mathbf{I} é a matriz identidade $n \times n$, m é um inteiro positivo, e ambos λ e v podem ser complexos mesmo quando A é real. Quando $m = 1$, o vetor é chamado simplesmente de autovetor, e o par é chamado de autopar. Nesse caso, $Av = \lambda v$. Qualquer autovalor λ de A tem autovetores comuns associados a ele, pois se m é o menor inteiro tal que $(A - \lambda \mathbf{I})^m v = 0$ para um autovetor generalizado v , então $(A - \lambda \mathbf{I})^{m-1} v$ é um autovetor comum. O valor m sempre pode ser tomado como menor ou igual a n . Em particular, $(A - \lambda \mathbf{I})^n v = 0$ para todo autovetor v associado com λ .

Definição A.1. O *autoespaço generalizado real* de A correspondendo a λ é dado por

$$E_\lambda = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \mathbf{I})^n x = 0\} & \text{se } \lambda \in \mathbb{R} \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid [(A - \lambda \mathbf{I})(A - \bar{\lambda} \mathbf{I})]^n x = 0\} & \text{se } \lambda \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Deste modo, o espaço \mathbb{R}^n pode ser escrito como soma direta de todos os autoespaços generalizados de A . Para cada autovalor λ de A , o núcleo $\ker(A - \lambda \mathbf{I})$ consiste de todos os autove-

tores associados com λ (junto com 0), chamado de autoespaço de λ , enquanto o espaço vetorial $\ker((A - \lambda\mathbf{I})^n)$ consiste de todos os autovetores generalizados, e é chamado de autoespaço generalizado. A *multiplicidade geométrica* de λ é a dimensão do autoespaço. A *multiplicidade algébrica* de λ é a dimensão do autoespaço generalizado. Esta última terminologia é justificada pela equação

$$p_A(z) = \det(z\mathbf{I} - A) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{\alpha_i}, \quad (\text{A.2})$$

onde \det é a função determinante, λ_i são todos os autovalores distintos de A e α_i são as correspondentes multiplicidades algébricas. A função $p_A(z)$ é o *polinômio característico* de A . Então a multiplicidade algébrica é a multiplicidade do autovalor como um zero do polinômio característico. Como qualquer autovetor é também um autovetor generalizado, a multiplicidade geométrica é menor ou igual à multiplicidade algébrica. As multiplicidades algébricas somam até n , o grau do polinômio característico. A equação $p_A(z) = 0$ é chamada de equação característica, pois suas raízes são exatamente os autovalores de A . Pelo teorema de Cayley-Hamilton, A obedece à mesma equação: $p_A(A) = 0$. Como consequência, as colunas da matriz $\prod_{i \neq j} (A - \lambda_i \mathbf{I})^{\alpha_i}$ devem ser ou 0 ou autovetores generalizados para o autovalor λ_j , já que são aniquiladas por $(A - \lambda_j \mathbf{I})^{\alpha_j}$.

Qualquer coleção de autovetores generalizados de distintos autovalores é linearmente independente, então uma base para todo \mathbb{C}^n pode ser escolhida consistindo de autovetores generalizados. Mais precisamente, essa base $\{v_i\}_{i=1}^n$ pode ser escolhida e organizada de modo que

- se v_i e v_j tem o mesmo autovalor, então v_k também tem, para cada k entre i e j , e
- se v_i não é um autovetor ordinário, e se λ_i é o seu autovalor, então $(A - \lambda_i \mathbf{I})v_i = v_{i-1}$ (em particular, v_1 deve ser um autovetor ordinário).

Se os vetores dessa base são postos como colunas de uma matriz $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$, então V pode ser usado para converter A para sua *forma normal* ou *forma canônica de Jordan*:

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde λ_i são os autovalores, $\beta_i = 1$ se $(A - \lambda_{i+1}\mathbf{I})v_{i+1} = v_i$ e $\beta_i = 0$ do contrário.

Mais genericamente, se W é qualquer matriz invertível, e λ é um autovalor de A com autovetores generalizados v , então $(W^{-1}AW - \lambda\mathbf{I})^k W^{-k}v = 0$. Assim, λ é um autovalor de $W^{-1}AW$

com autovetor generalizado $W^{-k}v$. Isto é, matrizes similares possuem os mesmos autovalores.

A.2 Propriedades do Produto Tensorial

Sejam \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} matrizes reais de dimensões $(m \times n)$, $(p \times q)$, $(n \times u)$, $(q \times v)$, respectivamente, \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{d} vetores de dimensões $(m \times 1)$, $(n \times n)$ e $(p \times 1)$, respectivamente, e x e y números reais. Pode-se mostrar que valem as seguintes propriedades:

- (i) $x \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes x = x\mathbf{A}$;
 - (ii) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^\top = \mathbf{b}^\top \otimes \mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\top$;
 - (iii) $\mathbf{0}_{p \times q} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{0}_{p \times q} = \mathbf{0}_{mp \times nq}$;
 - (iv) $\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_p = \mathbf{I}_{mp}$;
 - (v) Se $\mathbf{F} = \text{diag}(f_{11}, \dots, f_{kk})$, então $\mathbf{F} \otimes \mathbf{A} = \bigoplus_{i=1}^k f_{ii} \mathbf{A}$;
 - (vi) $\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{A} = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{A}$;
 - (vii) $x\mathbf{A} \times y\mathbf{B} = xy(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$;
 - (viii) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$;
 - (ix) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B}\mathbf{D})$;
 - (x) $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_p)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}) = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_q)$;
 - (xi) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{d}^\top)(\mathbf{b} \otimes \mathbf{B}) = (\mathbf{d}^\top \otimes \mathbf{A})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{d}^\top \mathbf{B}$;
 - (xii) $\mathbf{D} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{D} \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{D} \otimes \mathbf{B})$;
 - (xiii) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\top = (\mathbf{A}^\top \otimes \mathbf{B}^\top)$;
 - (xiv) $\text{rank}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{A})\text{rank}(\mathbf{B})$;
 - (xv) $\text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A})\text{tr}(\mathbf{B})$;
- Além disso,
- (xvi) Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes simétricas, então $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\top = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$;
 - (xvii) Se \mathbf{A} é uma matriz quadrada de ordem n e \mathbf{a} é um vetor $(m \times 1)$, então $(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{a})\mathbf{A}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{a}^\top) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{a}\mathbf{a}^\top$;
 - (xviii) Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes invertíveis, temos $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$;
 - (xix) Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes quadradas de ordem m e n , respectivamente, então $\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = [\det(\mathbf{A})]^n [\det(\mathbf{B})]^m$;
 - (xx) Seja $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2]$; então $[\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2] \otimes \mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B} \ \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}]$,
mas $\mathbf{W} \otimes [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2] \neq [\mathbf{W} \otimes \mathbf{B}_1 \ \mathbf{W} \otimes \mathbf{B}_2]$.

Apendice B

FORMAS SIMPLÉTICAS E EQUAÇÕES DE HAMILTON

Por uma *forma simplética* em \mathbb{R}^{2n} queremos nos referir a uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada. Por não-degenerada, queremos dizer que a representação matricial da forma bilinear é não-singular. Um espaço vetorial equipado com uma forma simplética é chamado de *espaço vetorial simplético* [94, Capítulo 14]. Para o nosso espaço de fase \mathbb{R}^{2n} , uma forma simplética é dada por

$$\Omega(u, v) \equiv \langle u, \mathbf{J}v \rangle, \quad u, v \in \mathbb{R}^{2n},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno euclidiano padrão em \mathbb{R}^{2n} . Essa forma simplética específica é chamada de *forma simplética canônica* (consulte por exemplo Abraham e Marsden [1] para uma teoria mais geral sobre formas simpléticas em espaços vetoriais de dimensão finita).

Dizemos que a forma simplética $\Omega(\cdot, \cdot)$ define uma estrutura simplética no espaço de fase \mathbb{R}^{2n} . Para uma determinada função hamiltoniana H , as equações de Hamilton correspondentes são então derivadas da estrutura simplética através da fórmula

$$\Omega(F_H(x), v) = \langle dH(x), v \rangle, \quad x, v \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (\text{B.1})$$

Pode-se pensar em (B.1) como uma equação para $F_H(x)$, para um dado $H(x)$.

Voltamos à questão de derivar as equações de Hamilton a partir desta fórmula. Seja $F = (\dot{q}, \dot{p})$ um campo vetorial arbitrário em \mathbb{R}^{2n} com $dH = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right)$. Então (B.1) torna-se

$$\Omega((\dot{q}, \dot{p}), v) = \langle (\dot{q}, \dot{p}), \mathbf{J}v \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right), v \right\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Como \mathbf{J} é anti-simétrica (3.11), temos $\mathbf{J}^\top = -\mathbf{J}$ e daí,

$$\langle (\dot{q}, \dot{p}), \mathbf{J}v \rangle = \langle -\mathbf{J}(\dot{q}, \dot{p}), v \rangle = \langle (-\dot{p}, \dot{q}), v \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.3) em (B.2) nos dá

$$\langle (-\dot{p}, \dot{q}), v \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right), v \right\rangle. \quad (\text{B.4})$$

Para finalizar, precisamos apenas usar a não-degeneração da forma simplética. Para v fixo, usando a linearidade da estrutura podemos reescrever (B.4) como

$$\langle (-\dot{p}, \dot{q}) - \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right), v \rangle = 0,$$

o que vale para todo $v \in \mathbb{R}^{2n}$. Assim, pela não-degeneração da forma simplética devemos ter

$$(-\dot{p}, \dot{q}) - \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

que são as equações de Hamilton canônicas. Portanto, toda estrutura hamiltoniana tem uma forma simplética associada.