



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO  
CAMPUS DIADEMA**



**DÉBORA ERBERT DOS SANTOS**

**CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO DO PROFESSOR PARA O  
ENSINO DE FRAÇÕES**

DIADEMA

2024

DÉBORA ERBERT DOS SANTOS

**CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO DO PROFESSOR PARA O  
ENSINO DE FRAÇÕES**

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, ao programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo André Testoni.

DIADEMA

2024

**Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)**

Santos, Débora Erbert dos

Conhecimento pedagógico de conteúdo do professor para o ensino de frações / Débora Erbert dos Santos. -- Diadema, 2024. 59 f.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2024.

Orientador: Leonardo André Testoni

1. conhecimento pedagógico de conteúdo. 2. frações. 3. experiência. 4. professor. 5. ensino. I. Título.

Com muita gratidão, dedico esta pesquisa ao meu esposo Fabio e à minha família, que com muito carinho e paciência me ajudaram a tornar esse sonho possível.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos os envolvidos direta e indiretamente para que essa pesquisa se tornasse realidade. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Ao Doutor Leonardo André Testoni, orientador deste trabalho, pelas sugestões, críticas, perseverança e aconselhamentos. Sem sua ajuda essa pesquisa jamais seria concluída.

Novamente ao Testoni, que no momento mais difícil de minha vida, me instigou a continuar, sempre com gentileza. Com absoluta certeza, uma bela demonstração de conhecimento de estudantes e conteúdo.

À professora participante da pesquisa, pela generosidade em manter a porta de sua sala de aula sempre aberta.

Aos meus colegas do grupo de pesquisa GEPECIM, pelas escutas e sugestões, sempre auxiliando com muita sabedoria para enriquecimento desta pesquisa.

Ao meu marido e colega de profissão, o professor Fabio Gonçalves da Silva, que além de todo carinho e paciência, leu este trabalho inúmeras vezes e cuidou de nossos filhos para que essa pesquisa acontecesse.

Ao meu filho Henrique, que mesmo tão pequeno compartilha do mesmo amor pela matemática.

A minha filha Júlia, que enfrentou e venceu uma batalha pela vida enquanto essa pesquisa acontecia. Você venceu.

Por fim, a todos os professores do PECMA, pela inspiração e ensinamentos.

***“O educador se eterniza  
em cada ser que educa.”***

*(Paulo Freire)*

## RESUMO

O ensino de frações parece ser algo desafiador em todo o ensino fundamental, tanto para professores pedagogos, bem como para professores especialistas. Como professora de matemática, essa situação de dificuldade dos alunos em compreender os conteúdos envolvendo números fracionários me despertou grande interesse. Deste modo, o objetivo principal da pesquisa é observar de perto quais elementos do conhecimento pedagógico de conteúdo os professores que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental lançam mão para facilitar a aprendizagem.

Como referencial teórico, utilizamos o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo de Shulman (1987) e as pesquisas de Ball et. al. (2008) referente ao conhecimento matemático para o ensino. Os saberes docentes de Gatti (2010, 2016) e Pimenta (1996) também compõe o aporte teórico, pois os estudos são desenvolvidos para a realidade de formação de professores do nosso país.

A observação de aulas de uma professora do 5º ano do ensino fundamental foi o instrumento da pesquisa. A metodologia abordada nesse trabalho foi estudo de caso, para isso, a dissertação contou com a aprovação no Conselho de Ética e Pesquisa (CEP). A escolha dessa professora não foi feita de maneira aleatória, mas sim com base no referencial teórico saberes docentes. Uma professora com experiência, que está em constante formação e que sente prazer na profissão docente. Deste modo, conseguirmos observar o conhecimento pedagógico de conteúdo ao longo das aulas de ensino de frações e constatamos que seus subdomínios dificilmente podem ser analisados dissociados.

**Palavras-chaves:** conhecimento pedagógico de conteúdo, frações, experiência, professor, ensino.

## **ABSTRACT**

The teaching of fractions seems to be something challenging throughout elementary education, both for pedagogical teachers as well as for specialist teachers. As a mathematics teacher, this situation of students' difficulty in understanding the contents involving fractional numbers aroused great interest in me. Thus, the main objective of the research is to closely observe which elements of the pedagogical knowledge of content teachers who teach mathematics in the early years of elementary school use to facilitate learning.

As a theoretical framework, we used Shulman's (1987) Pedagogical Content Knowledge and Ball's research. al. (2008) regarding mathematical knowledge for teaching. The teaching knowledge of Gatti (2010, 2016) and Pimenta (1996) also composes the theoretical contribution, as the studies are developed for the reality of teacher training in our country.

The observation of classes of a 5th grade teacher was the instrument of the research. The methodology addressed in this work was a case study, for which the dissertation was approved by the Research Ethics Council (CEP). The choice of this teacher was not made randomly, but based on the theoretical framework of teaching knowledge. A teacher with experience, who is in constant training and who feels pleasure in the teaching profession. In this way, we were able to observe the pedagogical content knowledge throughout the classes of teaching fractions and we found that its subdomains can hardly be analyzed dissociated.

**Keywords:** pedagogical content knowledge, fractions, experience, teacher, teaching.



## **LISTA DE FIGURAS**

**Figura 1** – Domínios do conhecimento matemático para o ensino

**Figura 2** – Modelo consensual de PCK no ensino de ciências da cúpula do PCK

**Figura 3** – Modelo Consensual Refinado (MCR)

**Figura 4** – Proposta de diagrama para o modelo de PCK de Ball e seus colaboradores

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>1. REFERENCIAIS TEÓRICOS.....</b>	<b>13</b>
1.1 A formação do professor unidocente.....	14
1.2 Saberes Docentes.....	16
1.3 O conhecimento pedagógico de conteúdo.....	19
1.4 Modelo de PCK de Ball e seus colaboradores.....	22
1.5 O Modelo Consensual Refinado.....	26
<b>2. O ENSINO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....</b>	<b>30</b>
<b>3. METODOLOGIA.....</b>	<b>34</b>
3.1 Contexto da pesquisa.....	34
3.2 Referenciais Metodológicos.....	35
<b>4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....</b>	<b>36</b>
4.1 Uma conversa descontraída para iniciar.....	36
4.2 Mas não dá para ficar só no desenho.....	37
4.3 Compreendendo as falas dos estudantes.....	40
4.4 Meio quilo é igual a 500 gramas.....	42
4.5 O clássico problema parte-todo.....	44
4.6 A experiência sendo primordial no conhecimento dos estudantes.....	45
4.7 O que é convencional?.....	47
4.8 O denominador igual a zero.....	49
4.9 O conhecimento em diversas áreas.....	50
<b>5. CONSIDERAÇÕES.....</b>	<b>52</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>56</b>

## INTRODUÇÃO:

Formada em Licenciatura Plena em Matemática no ano de 2011 e no curso de Pedagogia no ano de 2012, ingressei no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (PECMA) da Universidade Federal do Estado de São Paulo (UNIFESP) no ano de 2022, tendo participado como aluna especial no PECMA no ano de 2020. No ano de 2014, ingressei como professora efetiva de matemática na rede pública do município de São Caetano do Sul, região do grande ABC paulista. Nessa mesma rede, no ano de 2019 ocupei a função de coordenadora pedagógica. Nesse momento, ano de 2024, leciono em turmas dos anos finais do ensino fundamental. É com muito carinho que atuo e que volto meus olhares para a escola pública, pois foi nesta instituição na qual cursei o ensino básico que devo minha gratidão e respeito.

Com a experiência adquirida em sala de aula, observação de dados e desempenho dos alunos em avaliações externas, e participação em cursos de formação, me chama a atenção as dificuldades no ensino e na aprendizagem dos Números Racionais, sendo mais específica, dos números fracionários. Essa inquietação não é nova, pois existem diversas pesquisas publicadas nos últimos anos relacionadas ao ensino e aprendizagem de frações.

Os números fracionários, muitas vezes, representam um desafio tanto para quem aprende quanto para quem ensina e, devido a isso, a intenção da pesquisa é analisar seu ensino nos anos iniciais do ensino fundamental. O objetivo principal é encontrar respostas para a seguinte questão: quais componentes do conhecimento pedagógico de conteúdo (PCK) são mobilizados pelo professor diante de um conteúdo específico, que são os números fracionários?

Para responder a essa pergunta, a pesquisadora assistiu e registrou aulas de uma professora dos anos iniciais do ensino fundamental. Após a obtenção dos dados através de registros audiovisuais das aulas, pôde-se refletir acerca do conhecimento pedagógico de conteúdo mobilizado no ensino de números fracionários.

Parte-se da hipótese de que é possível identificar certas dificuldades na formação matemática dos professores dos anos iniciais do ensino fundamental, mais precisamente, na identificação de Números Racionais e nos significados das frações. Todavia, espera-se também que, a partir desse estudo, possam ser realizados novas pesquisas que contribuam para a formação docente dos professores dos anos iniciais

do ensino fundamental de forma que este profissional possa promover um espaço de trabalho matemático produtivo para o aprendiz.

A formação inicial do professor, não se pode negar, é muito importante e precisa ser desvelada (Gatti, 2016). Porém, somente a formação inicial não é capaz de abranger todo o conhecimento necessário para uma prática pedagógica de excelência. A formação de um professor se inicia antes mesmo de ingressar na Universidade e se estende até sua experiência em sala de aula. São muitas as aptidões que um docente precisa adquirir e pesquisas que norteiam reformas nos cursos de formação de professores a respeito desse tema não faltam.

Em cursos de formação de professores muito se discute sobre a importância de ser um “profissional reflexivo” (Schön, 1983), porém nota-se o quanto esse tema pode ser amplo. O que é refletir e sobre o que refletir? Um termo relevante, mas que foi banalizado devido ao contexto da época em que Schön o idealizou. Uma das ideias é que o “profissional reflexivo” se tornou um termo pobre devido a fortes movimentos de profissionalização do ensino (Tardif, 2018).

As reformas, de modo geral, tinham como meta seguir o modelo de outras profissões e definir bases de conhecimento que todo educador deveria ter. O problema é que a educação corria o risco de se tornar extremamente técnica. Shulman (2014), reafirma a importância de “profissional reflexivo”, pois o objetivo da formação de professores não deve ser um mero treinamento para que o docente se comporte de maneira limitada, mas sim formar professores reflexivos. Em seu ensaio, há o modelo de raciocínio e ação pedagógica que envolve um ciclo: compreensão, transformação, instrução, avaliação, reflexão e novas compreensões. Entendemos, nesse ponto, que reflexão é olhar para o ensino que acabou de acontecer e aprender com a experiência.

De acordo com Shulman (1987), o professor, para lecionar, precisa ter uma base de conhecimento. Um dos pilares listados na base de conhecimento é o conhecimento pedagógico de conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK). O conhecimento de conteúdo consiste no conhecimento que o professor tem a respeito de sua disciplina, por exemplo, o conhecimento puro da matemática. Não obstante, o conhecimento de conteúdo pedagógico (PCK), abrange as maneiras como o professor aborda determinado conteúdo, incluindo os exemplos, as analogias, explicações, de maneira que o conteúdo se torne compreensível aos alunos.

Embora tenhamos Shulman (1987) como o precursor do PCK, diversos pesquisadores contribuíram com estudos. Ao longo dos anos, surgiram outros modelos de PCK, na qual também serão abordados na pesquisa, como a Déborah Ball e seus colaboradores (2008), que contribuíram com o PCK específico para a área da matemática e, também o Modelo Consensual a Refinado (MCR) de Carlson e Daehler (2019).

Desta forma, o interesse da pesquisa é investigar aspectos relacionados ao PCK de professores dos anos iniciais em relação aos números fracionários, elencando quais domínios do conhecimento referente ao PCK são mobilizados pelos professores ao ensinar frações aos seus alunos. O interesse por esse tema é devido a percepção de que ao lecionarmos para os alunos dos anos finais do ensino fundamental, nota-se que eles conseguem solucionar problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com os Números Naturais e, embora com certa dificuldade, também conseguem solucionar problemas envolvendo Números Racionais sob a forma de decimal. Porém, essa realidade não se repete com os números fracionários. Existem pesquisas (Damico, 2007; Santos Filho, 2015; i.e.) que tratam do ensino de frações sob a perspectiva do PCK e que servem de inspiração para a presente pesquisa.

O estudo envolve observações, gravações de aulas, e levantamento de dados. Portanto, se trata de uma pesquisa de estudo de caso e está dividida em cinco capítulos. O primeiro capítulo se dedica ao embasamento teórico com uma revisão bibliográfica a respeito de saberes docentes (Gatti, 2010 e 2016; Pimenta, 1996; Schön, 1983), PCK (Shulman, 1987), conhecimento especializado do professor de matemática (Ball 1988; Ball et al, 2008) e o Modelo Consensual Refinado (Carlson; Daehler, 2019). O ensino de números fracionários é abordado no segundo capítulo, com revisão bibliográfica pertinente, na qual a pesquisa documental também está presente, visto que é realizada uma análise das habilidades dos números fracionários descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O terceiro capítulo abrange o detalhamento da metodologia, com o contexto da pesquisa e o referencial metodológico justificando a pesquisa através de estudo de caso. O quarto capítulo aborda a análise dos dados obtidos através das gravações das aulas assistidas pela pesquisadora. Por fim, no quinto capítulo serão apresentadas as considerações com elucidações e ponto de vista da pesquisa.

## 1. REFERENCIAIS TEÓRICOS

A pesquisa se apoia nos referenciais teóricos do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, porém achou-se pertinente realizar um breve estudo a respeito dos Saberes Docentes (Gatti, 2010 e 2016; Pimenta, 1996) e do perfil dos futuros professores no Brasil (Gatti, 2010). O interesse, o referencial teórico da presente pesquisa, é especificamente uma categoria da *Knowledge Base*, o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK – sigla para o inglês *pedagogical content knowledge*). Para facilitar a leitura, ao longo da dissertação será utilizada a sigla PCK.

O PCK despertou interesse em outros pesquisadores, que buscaram explorar e redefinir seus conceitos, formando novos modelos. Ball e seus colaboradores (Ball; Thames; Phelps, 2008) partiram do PCK realizando uma releitura dos estudos de Shulman (1987) e ampliando os conceitos para a área da matemática, elaborando o *Mathematical Knowledge Teaching* (MKT). Em uma reunião no ano de 2012, foi proposto por pesquisadores e estudiosos do PCK, o Modelo Consensual (MC). Entretanto, de acordo com Carlson e Daehler (2019), apesar do MC abranger os conhecimentos de conteúdo, pedagógico, curricular, alunos e avaliações, esse modelo apresentava interpretações e dados divergentes entre os pesquisadores. Após novos encontros, os pesquisadores propuseram um modelo de PCK no ensino de ciências, o Modelo Consensual Refinado (MCR). O MCR é o modelo mais atual do PCK, envolvendo o trabalho e a colaboração de muitos pesquisadores, principalmente da área da ciência, trazendo pela primeira vez, dinamismo ao PCK. Ao longo desse capítulo, apresentaremos o PCK proposto por Shulman (1987), o modelo proposto por Ball e colaboradores (2008) e o MCR (Carlson; Daehler, 2019), pois embora não seja específico para o ensino da matemática, se trata do modelo mais atual de PCK. Os dados da pesquisa serão analisados buscando aproximações com o referencial teórico de Ball et.al. (2008).

## 1.1 A formação do professor unidocente

A formação inicial docente, obviamente, é de suma importância na vida do futuro professor. Porém, de acordo com Gatti (2010, 2016) e Pimenta (1996), os cursos de pedagogia e licenciaturas precisam ser aprimorados para que se formem profissionais mais próximos da realidade escolar no contexto atual de nossa sociedade e que contribuam para a identidade docente. O professor, sendo uma profissão atemporal, precisa estar em constante transformação e os cursos de formação continuada, de acordo com Pimenta (1996), não estão contribuindo com o processo dinâmico da profissão docente como prática social.

Antes de dissertarmos a respeito dos saberes docentes, faremos um estudo de quem são os futuros professores, com o perfil dos ingressantes nos cursos de pedagogia e licenciaturas.

Em seu artigo de 2010, Gatti aborda a formação de professores no Brasil, com análise mais específica sobre a formação inicial do docente, descrevendo o perfil dos alunos ingressos nos cursos de pedagogia e licenciaturas, bem como a legislação a respeito desses cursos e suas ementas e currículos. Os dados da pesquisadora são relevantes e preocupantes.

Os cursos superiores para formação de professores da educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental foram postulados somente com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996. Antes disso, a formação desses professores se dava através das Escolas Normais, que correspondia ao ensino médio. A legislação de 1996 previa dez anos de adequação para que os professores se formassem através do ensino superior, ou seja, a obrigatoriedade do curso superior para professores polivalentes iniciou-se em 2006, há apenas dezessete anos. No caso dos professores especialistas, que lecionam componentes curriculares específicos para os anos finais do ensino fundamental e ensino médio, suas formações iniciais eram puramente técnicas, como por exemplo, formados em direito lecionavam língua portuguesa. Isso antes da LDB. Somente com a LDB é que se regulamentou cursos de formação inicial para professores específicos, as licenciaturas. Mesmo atualmente, com a falta de docentes, muitos profissionais formados em outras áreas são admitidos em sala de aula, através do notável saber. (Gatti, 2010)

Outro ponto abordado por Gatti (2010) está no fato do perfil dos ingressantes nos cursos iniciais de licenciaturas e pedagogia, onde se baseou no questionário de perfil dos estudantes do Exame Nacional de Cursos (ENADE) de 2005. Segundo a pesquisadora, cerca de 65% dos alunos dos cursos de Pedagogia responderam que escolheram o curso por querem ser professor. Gatti (2010) aponta também que a maioria dos formados nos cursos de Licenciaturas é do sexo feminino, com cerca de 75% dos que responderam a pesquisa do Enade 2005. O fator idade é preocupante, pois apenas 35% dos alunos de Pedagogia se encontram na faixa de idade ideal, entre 18 e 24 anos.

Os dados do ENADE 2021, obtidos através do questionário do perfil socioeconômico dos estudantes concluintes dos cursos de licenciaturas, também não demonstra muitas diferenças com relação aos dados apontados por Gatti (2010). O fator idade ainda é preocupante, pois cerca de 28,3% estão na idade ideal de até 24 anos. Em comparação com as outras áreas, os bacharéis contam com 45,9% na idade ideal de até 24 anos e os tecnológicos contam com 38,4% na idade ideal de até 24 anos. Ao levarmos em consideração os alunos concluintes participantes do ENADE 2021, 32,3% estão na idade ideal de até 24 anos de idade, sendo assim, os cursos de licenciatura estão abaixo do esperado. Quanto ao sexo, 76% dos respondentes são mulheres. (INEP, ENADE, 2021).

O questionário específico para alunos de licenciatura sofreu alterações desde a pesquisa de Gatti (2010) com o ENADE 2005. Quando perguntados onde pretendem atuar daqui 5 anos, 64% querem ser professor de escola pública e 8% querem ser professor de escola privada. Quando perguntados se pretendem atuar no magistério após terminarem o curso, 63% responderam que sim, sendo sua atuação principal de acordo com o ENADE 2021.

Em síntese, 74% dos concluintes que participaram do ENADE 2021 advém de cursos de licenciatura. Cerca de 76% dos concluintes em licenciatura são mulheres e a maioria tem idade entre 24 e 33 anos. (INEP / MEC, 2021).

O Censo da Educação Superior de 2021 (INEP / MEC 2021) aponta um aumento consistente no número de matrículas dos cursos superiores na modalidade a distância (EAD). No ano de 2021 do total de matrículas dos cursos na área de Pedagogia e Licenciaturas, 61% representam a modalidade EAD.



Gatti (2010) em sua pesquisa, além de traçar um perfil dos ingressantes nos cursos de licenciatura, há uma análise dos currículos dos cursos de pedagogia e licenciaturas. Um dos apontamentos feito por Gatti (2010) e pertinente a esta pesquisa, é que com relação aos cursos de pedagogia, os conteúdos das disciplinas ministradas para os futuros professores na educação básica, aparecem na grade curricular de maneira esporádica, genérica e superficial.

Assim como Gatti (2010), os fatores levantados pela pesquisadora, bem como pela presente dissertação, podemos demonstrar preocupação com a formação inicial docente.

## **1.2 Saberes Docentes**

A formação inicial, tanto nos cursos de pedagogia e licenciaturas, bem como nas demais áreas de bacharelado, não consegue suprir todo o conhecimento necessário. A formação continuada é necessária para profissionais juristas, profissionais da saúde, profissionais de engenharias e tecnologias, e não deixa de ser necessário na formação docente.

Uma das metas do Plano Nacional de Educação (PNE) é o de garantir a formação dos profissionais da educação, assegurando não apenas a formação inicial, mas também a formação continuada. (INEP / MEC, 2021).

Pimenta (1996), professora e pesquisadora da USP, dedicou seus estudos a formação de professores, os saberes docentes e a construção da identidade do professor. De acordo com a pesquisadora, os cursos de formação inicial de professores pouco contribuem para a formação da identidade do professor. Já os cursos de formação continuada geralmente são ministrados com o objetivo de realizar uma atualização dos conteúdos do ensino, mas são pouco eficientes para aprimorar a prática do professor.

As profissões emergem de acordo com as necessidades de nossa sociedade. Algumas profissões deixam de existir e outras surgiram atualmente. No caso da profissão do professor, ela é e continuará a ser importante em nossa sociedade. Mas

como nossa sociedade se modifica, a profissão docente precisa constantemente se transformar para atender as demandas do contexto atual. (Pimenta, 1996, p. 75). Podemos concordar então que, a formação do professor nunca acaba, está em constante transformação.

Os saberes da docência, segundo Pimenta (1996), são a experiência, o conhecimento e saberes pedagógicos. Para a pesquisadora, a experiência já faz parte dos alunos dos cursos de formação inicial, no sentido de que já se têm uma noção sobre o que é ser professor. “Experiência que lhes possibilita dizer quais foram os bons professores, quais eram bons em conteúdo, mas não em didática, isto é, não sabiam ensinar” (Pimenta, 1996, p. 77). Alguns alunos sabem sobre a carreira do professor através da mídia, outros já possuem atividade docente, pois se formaram no magistério. O desafio dos cursos de formação inicial de professor, de acordo com Pimenta (1996), é o de colaborar para que os futuros professores se enxerguem como professores. “Isto é, de construir sua identidade de professor”. (Pimenta, 1996, p. 77). Os saberes da experiência também são aqueles produzidos ao longo de sua carreira, refletindo sobre a sua própria prática, bem como observando colegas lecionarem na escola.

O saber docente conhecimento, na visão de Pimenta (1996) é algo mais amplo que o simples conhecimento de determinado componente curricular da escola. Que o professor precisa ter os conhecimentos específicos, parece claro de maneira geral. Mas o conhecimento é a maneira de trabalhar com as informações. Inteligência é a forma de produzir progresso e desenvolvimento através do conhecimento. Com a informação chegando na palma de nossas mãos cada vez mais rápido e com maior volume, fica claro que a função da escola não se reduz a informar, mas sim trabalhar com essas informações para se ter desenvolvimento da sociedade.

O último saber docente é os saberes pedagógicos. Para ser professor, precisamos de experiência, de conhecimento, mas também de saberes pedagógicos e didáticos. A pesquisadora critica a forma desarticulada em que esses saberes têm sido trabalhados nos cursos de formação de professores. “Trata-se, portanto, de reinventar os saberes pedagógicos a partir da prática social da educação.” (Pimenta, 1996, p. 81). A educação deve ser dinâmica. Se tratamos as informações, as avalanches de informações e, através da prática social de ensinar mediamos para que a sociedade obtenha conhecimento e ela se transforme, então os saberes

pedagógicos também serão transformados. “Considerar a prática social como o ponto de partida e como ponto de chegada possibilitará uma re-significação dos saberes na formação de professores.” (Pimenta, 1996, p. 81). Senso assim, os saberes pedagógicos, de acordo com Pimenta (1996), são construídos a partir da prática. Porém, somente a prática sem um estatuto epistemológico, sem teoria, não forma os saberes docentes.

Além dos conhecimentos adquiridos na formação inicial, Testoni (2013) afirma que o docente convive com muitas situações que podem contribuir para sua identidade profissional e para a construção de seus saberes docentes. Alguns fatores são: o ambiente escolar, a socialização com outros professores e sua própria prática.

Todavia, a formação do professor, ainda de acordo com Testoni (2013), pode ocorrer antes mesmo da formação inicial:

Tão importante quanto o contexto escolar e a formação acadêmica do docente, vale salientar que o perfil profissional do professor pode sofrer influência de períodos pré-docência, quando ainda não se encontrava em efetivo exercício docente. A imersão em práticas de vida pré-profissional, tais como sua formação familiar e escolar básica, podem influenciar sua identidade no magistério. (p.55)

As temáticas, reforma na educação e educação continuada do profissional docente não são novas. Gatti (2010) e Pimenta (1996), não foram as primeiras pesquisadoras críticas da formação docente.

Shulman (1987), através de seus estudos, afirma que na década de 1980, muito se discutia uma reforma na educação, e um dos temas mais abordados na época era a profissionalização do ensino. Com isso, houve uma necessidade de formalização da formação do professor. A sociedade estava em evolução e a maioria das profissões estava na corrida para uma formação mais técnica. Relatórios apontavam a necessidade de se ter uma base de conhecimento do profissional da educação, todavia, não havia detalhes de quais saberes docentes eram importantes de serem adquiridos.

“A retórica relacionada a base de conhecimento, no entanto, raramente especifica o caráter desse conhecimento. Não diz o que os professores deveriam saber, fazer, entender ou dizer que tornasse o ensino algo mais do que uma forma de trabalho individual, quanto mais ser considerado entre as profissões que requerem formação acadêmica.” (Shulman, 2014, p. 200)

Em um ensaio de 1987, Shulman propôs a base de conhecimento do professor. Uma espécie de manual, ou modelo, que continha todas as qualidades e saberes que um bom profissional docente deveria ter.

Pensando no contexto da época, o estudo de Shulman (1987) parece contradizer os trabalhos de Schön, cuja ideia central é que um professor não pode ser considerado um mero técnico, mas sim um profissional que reflete sobre suas ações e, portanto, sua formação está em constante construção. De acordo com Tardif e colaboradores (2018), existem dois problemas com as ideias de Schön: o primeiro é que não há um detalhamento sobre “reflexão-na-ação”, dificultando o entendimento do que o pesquisador quis expressar. O segundo problema é que Schön não descreve quais são os conteúdos dessas reflexões. Sendo assim, podemos dizer que Tardif se preocupa com a falta de especificações e de detalhes sobre o termo “profissional reflexivo” onde “só deram origem a controvérsias intermináveis ou à multiplicação de definições opostas ou variantes diversas”. (Tardif, 2018, p. 393)

No processo de formação de professor, Shulman (1987) defende uma base de conhecimento para o ensino, em inglês *knowledge base*. A intenção dessa pesquisa não é detalhar profundamente a base de conhecimento, portanto será feita apenas uma breve descrição. O pesquisador e seus colaboradores observaram jovens futuros professores ao longo de suas formações acadêmicas. Observaram também professores veteranos e fizeram comparações entre os novatos. Dessas observações e reflexões surgiram as seguintes categorias: conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico geral; conhecimento do currículo; conhecimento dos alunos; conhecimento de contextos educacionais; conhecimento da base histórica e filosófica da educação; conhecimento pedagógico do conteúdo.

### **1.3 O conhecimento pedagógico de conteúdo.**

Ter conhecimento de quais habilidades são essenciais para formar um bom professor é uma demanda antiga.

Na década de 1980, avaliações de desempenho dos professores e dos alunos eram amplamente aplicadas e analisadas a fim de estabelecer critérios e grade curricular de cursos de formação de professores com a intenção de melhorar a educação. Em alguns países essa prática continua a mesma atualmente.

De acordo com Testoni (2013), Lee Shulman apresentou pela primeira vez, durante uma conferência no Texas em 1983, as habilidades docentes necessárias. Mais tarde o conceito apresentado ficaria conhecido no mundo como Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK).

A primeira versão do PCK, portanto, foi estabelecida por Shulman no ano de 1987. Para o pesquisador, PCK é um conhecimento único do professor, onde o conteúdo é transformado de maneira a facilitar a compreensão do aluno. Outros profissionais especialistas precisam compreender o conteúdo. O que difere um especialista de um professor é que somente o professor precisa compreender o conteúdo e transformar o conteúdo para ser estudado em sala de aula. (Shulman, 1987).

Mizukami (2004) descreve o conhecimento pedagógico de conteúdo da seguinte forma:

Trata-se de um novo tipo de conhecimento, que é construído constantemente pelo professor ao ensinar a matéria e que é enriquecido e melhorado quando se amalgamam os outros tipos de conhecimento explicitados na base. É uma forma de conhecimento do conteúdo. Inclui compreensão do que significa ensinar um tópico de uma disciplina específica assim como os princípios e técnicas que são necessários para tal ensino. (p.39).

Seguindo esta linha de pensamento, Testoni (2013) nos leva a refletir que, para além dos conhecimentos adquiridos em formação inicial e continuada, o ambiente escolar, o contato com outros docentes, a própria prática em sala de aula, são importantes para a formação do professor. Sendo assim, não se pode deixar de considerar a experiência do profissional docente.

Para que um conteúdo passe pelo processo de transformação é necessário planejamento, análise do currículo e análise do conteúdo, selecionando estratégias de ensino levando em consideração as características dos estudantes, promovendo melhores resultados nos processos de ensino-aprendizagem. (Shulman, 1987).

O primeiro modelo de PCK proposto por Shulman era de fato advindo da experiência docente:

Nessa primeira fase, Lee Shulman procura centrar seu conceito de Conhecimento Pedagógico de Conteúdo em um patamar muito mais cognitivo e individual, localizando-o, principalmente, nos saberes provenientes da própria experiência docente na sala de aula ou escola, citando, porém, a influência que a formação inicial e continuada também traria a esta construção. (Testoni, 2013, p. 61)

As bases de conhecimento de Shulman (1987) poderiam ser mal interpretadas como sendo meramente um manual de instruções para professores, contendo elementos importantes para ser um bom profissional. Essa ideia parece controversa as pesquisas de Schön (1983) sobre o docente ser reflexivo e não um tecnicista, o que leva Shulman a revisitar e criticar seu próprio trabalho, buscando repensar uma nova proposta para o PCK.

Na primeira proposta de PCK, Shulman atribuía ênfase no individual. Já na segunda proposta, o modelo de PCK considerava a comunidade dos professores. Na visão de Testoni (2013) o professor é membro de uma comunidade docente, capaz de ensinar e aprender com suas experiências. Para o pesquisador, no segundo modelo de PCK “(...) o professor deverá atuar em um patamar reflexivo de sua prática, repensando constantemente sua prática através de mediações de sua comunidade de aprendizagem (sala de aula, escola, diretorias de ensino, ...) (...)” (p. 62)

Para esclarecer *prática* e *reflexão* na visão de Shulman, nos apoiamos nas pesquisas de Testoni (2013). O professor precisa ter habilidades para modificar sua prática sempre que necessário e aprender com sua própria experiência através da reflexão sobre a própria prática. Portanto, podemos afirmar que experiência é algo muito além da quantidade de tempo dedicado na docência. O professor experiente é aquele que reflete e aprende sobre sua prática, para que esta possa ser modificada e aprimorada.

De acordo com Testoni (2013), diversos pesquisadores se apoiaram nos trabalhos de Shulman e deram continuidade a novos modelos de PCK. Grossman (1990), divide o PCK em quatro categorias; Cochran (1993) também divide o PCK em quatro categorias e segue a linha do construtivismo e afirmando que professores sem experiência teriam níveis de PCK menos complexos; Abell (2007) que elabora uma proposta de PCK em ensino de ciências; Ball et. al. (2008) que aponta pesquisas de PCK de professores de matemática.

Nesta pesquisa, embora os modelos citados sejam relevantes, iremos abordar o PCK elaborado por Ball e pesquisadores (2008) para os professores de matemática. Embora seus estudos estejam ligados a matemática, notaremos que esse modelo também contribui em outras áreas do conhecimento, ou disciplinas escolares, pois de acordo com Ball et. al. (2008) seus estudos buscam refinar o conceito de conhecimento pedagógico de conteúdo.

#### **1.4 Modelo de PCK de Ball e seus colaboradores.**

Diversas pesquisas visando aprimorar o PCK foram realizadas antes de Ball et. al. (2008), porém a pesquisadora e seus colaboradores partem do segundo modelo de Shulman.

Em 2008, o artigo intitulado “Conhecimento do Conteúdo para o Ensino. O que o torna especial”, Ball; Thames e Phelps buscaram refinar o PCK de Shulman, pois de acordo com os pesquisadores, à medida que o conceito de conhecimento pedagógico de conteúdo se popularizava no mundo acadêmico, se tornou necessário um maior desenvolvimento teórico e analítico. O termo conhecimento pedagógico de conteúdo, apesar de amplamente utilizado, “é sub especificado”, sendo traduzido muitas vezes como uma ponte entre o conhecimento e o ensino. Alguns tratam desse conceito como sendo óbvios, ou seja, são conhecimentos gerais que todo professor precisa ter.

De acordo com Ball et. al. (2008), no contexto da época em que Shulman elaborou o primeiro modelo de PCK, muitos estudos se concentravam em aspectos gerais do ensino e pouca atenção era dada ao conteúdo. Embora os conhecimentos gerais fossem de suma importância, não se deve excluir dimensões específicas de conteúdo. Portanto, não se deve separar o conhecimento do conteúdo do conhecimento pedagógico. Esses dois conhecimentos devem caminhar juntos.

Ao focar na matemática, a ideia é que os professores precisam saber toda a matemática do currículo e mais alguns anos de estudos matemáticos universitários. Também se sugere que os professores precisam conhecer o currículo de maneira mais profunda e ter mais alguns conhecimentos pedagógicos. Essas afirmações não deixam claro o que constitui esse “conhecimento a mais” que os professores de matemática precisam ter. Sendo assim, o trabalho dos pesquisadores era de determinar o que mais os professores precisam saber sobre matemática e como usar esse conhecimento na prática. (Ball; Thames; Phelps, 2008).

Para elaborar a pesquisa e responder as inquietações, o estudo se concentrou em trabalhos que os professores realizam no ensino da matemática e no papel e na importância dos diferentes tipos de conhecimento matemático para o ensino. A partir disso, Ball et. al. (2008) conseguiram identificar e definir dois novos subdomínios do

conhecimento matemático para o ensino: Conhecimento Especializado de Conteúdo e Conhecimento Horizontal de Conteúdo.

Buscando refinar ainda mais os domínios do conhecimento matemático para o ensino, Ball et. al. (2008) faz uma releitura não só do PCK de Shulman, mas também do Conhecimento de Conteúdo de Shulman, detectando assim, seis subdomínios: conhecimento comum do conteúdo; conhecimento especializado do conteúdo; conhecimento do horizonte do conteúdo; conhecimento do conteúdo e estudante; conhecimento do conteúdo e ensino e conhecimento do conteúdo e currículo.

Ao analisarmos os seis subdomínios de Ball et. al. (2008), nota-se que a base de conhecimento de Shulman referente ao currículo também está presente. Sendo assim, os pesquisadores não só estudam o PCK, mas também outras duas bases de conhecimento de Shulman; conhecimento de conteúdo e conhecimento do currículo.

Descrevemos brevemente os seis subdomínios de Ball et. al. (2008):

**Conhecimento Comum do Conteúdo:** é o conhecimento dos conteúdos matemáticos, não sendo de exclusividade do professor, mas que é necessário para se realizar o trabalho docente. Quando o professor não tem o conhecimento de conteúdo adequado a aula fica prejudicada. Segundo Ball et. al. (2008), o professor tem um conhecimento matemático que não é exclusivo de sua profissão. Independente da profissão, todos temos de saber realizar operações matemáticas básicas que envolvem nosso cotidiano. Um engenheiro sabe resolver cálculos matemáticos complexos, porém isso não significa que saiba lecionar para alunos da educação básica.

**Conhecimento do Horizonte do Conteúdo:** conhecimento específico do docente a respeito da organização dos conteúdos dentro de um currículo, bem como a maneira que os conteúdos se relacionam. É a consciência de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo de todo o estudo da matemática. Os professores do quinto ano precisam saber como a matemática que os alunos estão aprendendo no momento está relacionada com a matemática que os alunos aprenderão no sétimo ano, para formar uma base para o próximo tópico a ser ensinado. Os números fracionários não são e nem devem ser abordados da mesma forma no 5º e no 7º ano, por exemplo.

**Conhecimento Especializado do Conteúdo:** se trata de um conhecimento do conteúdo exclusivo do professor. Para realizar uma operação com frações, o sujeito



não precisa ser professor, esse conhecimento é de comum do conteúdo. Mas para ensinar frações, o professor precisa conhecer, de acordo com Testoni (2013) “(...) as peculiaridades existentes no ensino de determinados tópicos dentro de uma disciplina, sendo necessárias estratégias específicas em sua condução.” (p. 70)

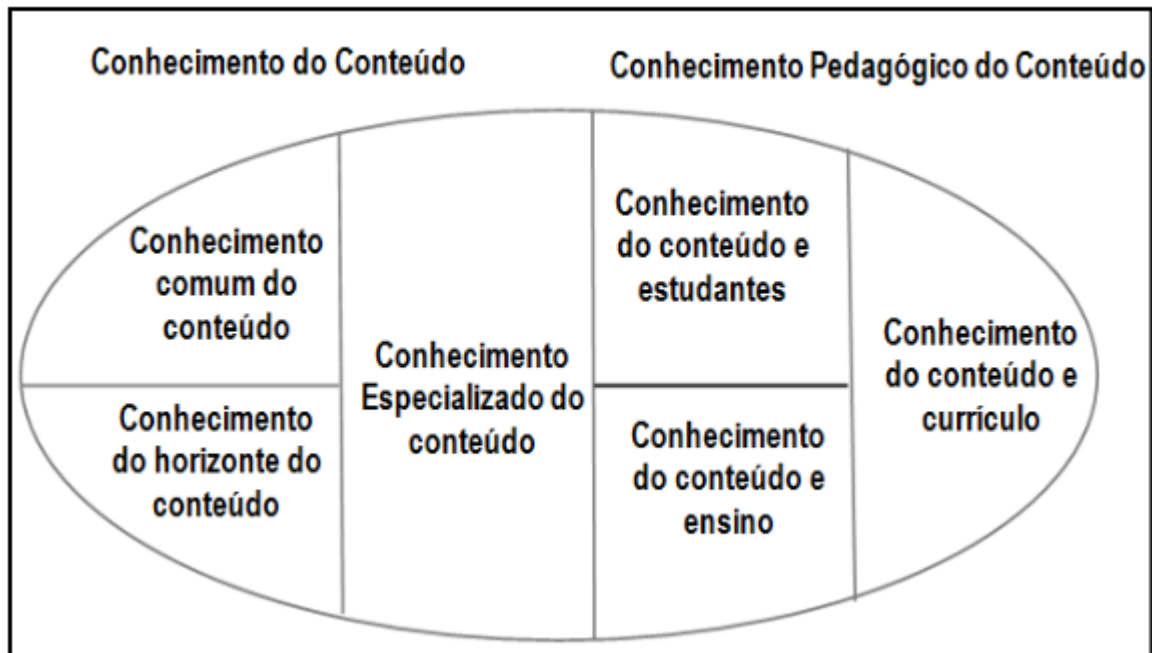
Como exemplo, Ball et. al. (2008) aborda a operação da subtração, no caso  $307 - 168$ . Para realizar tal operação, ou verificar se o resultado está correto ou não, geralmente qualquer pessoa possui o conhecimento necessário, sendo professor ou não. Porém, para ensinar, ser capaz de realizar o cálculo ou verificar se a resposta está correta, não é suficiente. O trabalho do professor requer que seja identificado a origem do erro, de maneira rápida, com eficiência. O professor se depara com diversos tipos de soluções de seus alunos e precisa verificar se o pensamento matemático está correto e se segue um padrão geral. Além de analisar as resoluções dos alunos e verificar se há alternativas para os cálculos, o ensino envolve a maneira como é ofertada a explicação.

**Conhecimento do Conteúdo e Estudantes:** a experiência contribui muito para esse subdomínio do conhecimento, pois envolve conhecer bem os estudantes, prevendo em que ponto do conteúdo haverá mais dificuldades ou facilidades de compreensão.

**Conhecimento do Conteúdo e Ensino:** conhecimento que envolve a ação de planejar. O professor deve ter um conhecimento matemático de instrução, ordenado os conteúdos de maneira adequada, refletindo sobre os exemplos, a linguagem, materiais e até mesmo jogos que poderão ser utilizados na aula para facilitar a compreensão dos conteúdos pelos estudantes. (Ball et. al. 2008)

**Conhecimento do Conteúdo e Currículo:** se trata de conhecer quais conteúdos devem ser ensinados aos alunos em determinado nível de ensino. Nesse momento, Ball et. al. (2008) ressalta a importância de o professor conhecer o currículo não somente de sua disciplina. Neste caso, quando o professor busca o conhecimento curricular para além da disciplina de matemática, passando a se inteirar a respeito dos conteúdos que os alunos estão estudando nas outras disciplinas, a aprendizagem se torna mais rica.

**Figura 1:** Domínios do conhecimento matemático para o ensino



Fonte: Santos Filho (2015, p.43) apud Ball et. al. (2008)

Ball et. al (2008) ressalta que os professores devem conhecer bem o conteúdo que lecionam, não pode haver nada mais fundamental. Ao mesmo tempo, porém, conhecer o conteúdo não é o suficiente para o ensino. O importante é saber usar a matemática para o ensino. Mas, continuando a seguir a linha dos pesquisadores, o que se nota em cursos de formação de professores é uma matemática distante do ensino da sala de aula. (Ball et. al., 2008)

Com relação aos estudos de Ball e seus colaboradores acerca do PCK de Shulman, os próprios pesquisadores alertam que há necessidade de aprofundamento e mais trabalhos, principalmente sobre o conhecimento especializado de conteúdo. De fato, muitas pesquisas e grupos de estudo tem desenvolvido trabalhos significativos do PCK posteriores a Ball, Thames e Phelps (2008). O modelo mais atual de PCK é o Modelo Consensual Refinado (MCR), de 2012, que será abordado logo a seguir.

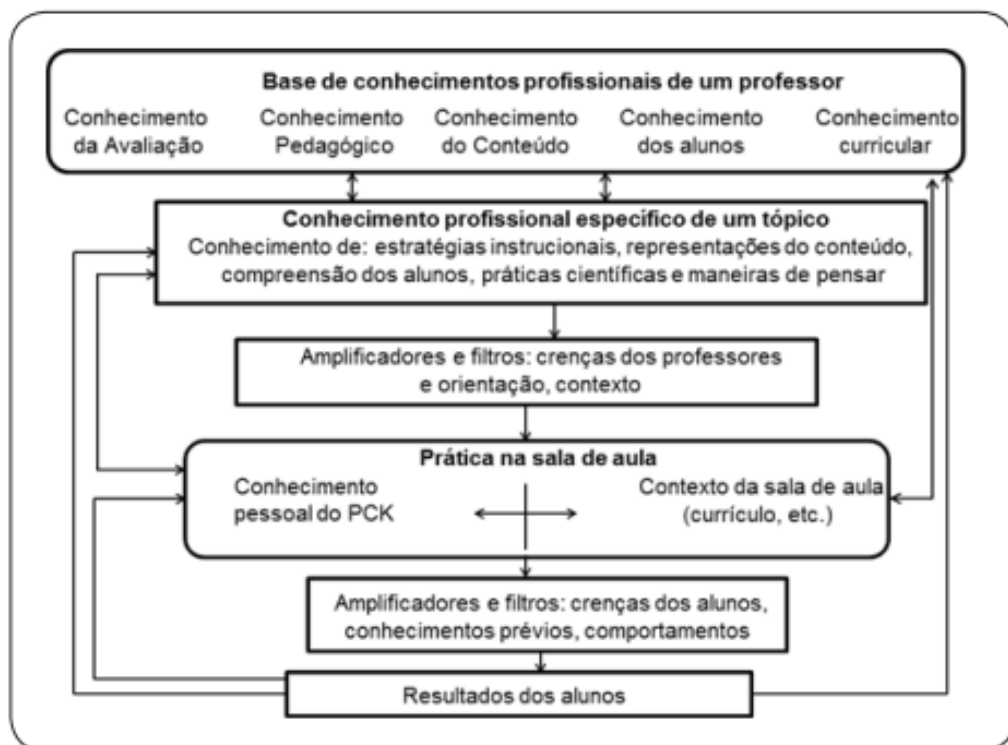
Ressaltamos que a presente pesquisa, apesar de abordar o MCR, para análise dos dados e resultados, está balizada nos seis subdomínios de Ball et. al. (2008).

## 1.5 Modelo Consensual Refinado

O precursor do PCK foi Shulman, mas grandes pesquisadores deram continuidade em seus trabalhos. Com isso, além do modelo de Ball et. al. (2008), temos outros modelos que não serão citados nessa pesquisa. Embora o modelo de Ball e seus colaboradores seja a base para a presente pesquisa, o modelo mais atual é o Modelo Consensual Refinado (MCR), formulado em 2019. Até chegarmos ao MCR, muitas pesquisas, muitos encontros de grandes mentes, serviram de base para esse modelo mais atual de PCK.

No ano de 2012, uma conferência reuniu o trabalho de diversos pesquisadores na área do PCK. Foram trinta grupos de pesquisadores da área de ciências que chegaram juntos em um consenso, formando o Modelo da Cúpula do PCK (Fernandez, 2015). De acordo com Fernandez (2015), nesse modelo considera-se que o PCK sofre influências e “passa por filtros e amplificadores” que são o contexto que o professor está inserido, as crenças desse profissional, a sala de aula, o currículo, bem como o resultado que o aluno apresenta.

**Figura 2:** Modelo consensual de PCK no ensino de ciências da cúpula do PCK



Fonte: HELMES; STOKES, 2013; GESS-NEWSOME; CARLSON, 2013 apud FERNANDEZ 2015.

Com esses filtros e amplificadores sendo observados e pesquisados de forma mais efetiva, o Modelo da Cúpula foi revisitado e ampliado, apresentando três distintos domínios para o PCK: PCK coletivo, PCK pessoal e PCK em ação. Esse é o modelo mais atual, o MCR (Carlson; Daehler, 2019). “O MCR tem a pretensão de deixar mais explícito o que a comunidade científica entende por PCK, como ele se desenvolve e quais são as contribuições ao seu desenvolvimento.” (Silva; Fernandez, 2021)

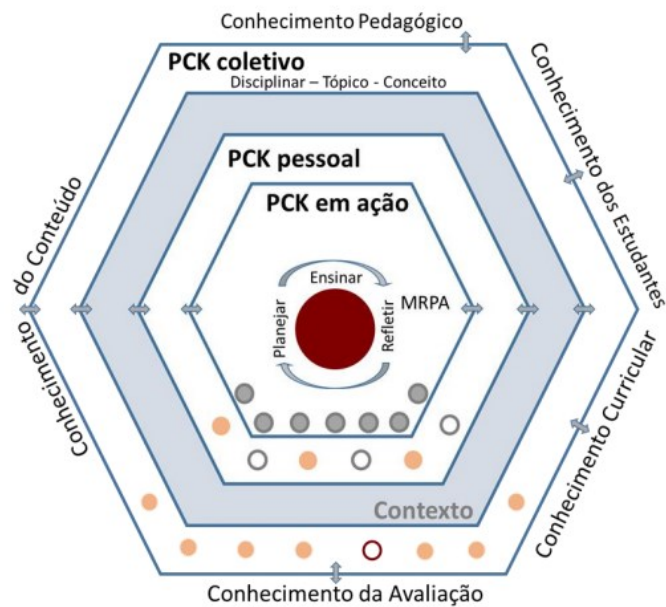
Silva e Fernandez (2021) pesquisaram e analisaram o PCK de um professor que leciona química inserido em dois contextos escolares diferentes pela perspectiva do MCR. Nesse trabalho, fica claro como o MCR trouxe dinamismo para o PCK, ao levar em consideração as influências das políticas públicas, dos alunos, da comunidade ao redor da escola, dos espaços escolares e dos outros professores.

O PCK coletivo é o conhecimento profissional dos professores. Se trata dos conhecimentos propostos por Shulman (1987): conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico, conhecimento dos estudantes, conhecimento curricular e conhecimento da avaliação. O PCK pessoal, que sofre influência do PCK coletivo, é de caráter específico de cada professor, levando em consideração seu próprio contexto, suas concepções e crenças. Nesse domínio, há influências também de outros professores, pesquisas acadêmicas e dos alunos. O PCK em ação é o resultado da aplicação do PCK pessoal diante de um contexto de aprendizagem, formando um ciclo entre reflexão, planejamento e ensino, levando em consideração os resultados dos alunos. (Silva; Fernandez, 2021)

A pesquisa tem a pretensão de observar o PCK da professora sob a perspectiva de Ball et. al. (2008), mas também seria muito interessante poder observar aproximações com o MCR (2019). Deste modo, embora o principal objetivo seja de analisar os subdomínios do PCK, acreditamos que é importante destacar o MCR (2019) por se tratar de um modelo mais atual em comparação com o PCK de Ball et. al. (2008).

A figura a seguir, de Silva e Fernandez (2021), representa o Modelo Consensual Refinado (MCR) adaptado do modelo de Carlsen e Daehler (2019).

**Figura 3:** Modelo Consensual Refinado (MCR)



Fonte: SILVA; FERNANDEZ, 2021

O professor está representado pelo círculo central de cor vinho. Os outros círculos são “atores” que influenciam o PCK do professor. Sendo os círculos laranjas os pesquisadores e outras contribuições, o círculo vinho vazado representa outros professores, os círculos cinzas vazados são os alunos e os círculos cinzas são os resultados dos alunos. (Silva; Fernandez, 2021).

De acordo com Fernandez (2015):

O modelo da cúpula do PCK representa ainda o desenvolvimento do PCK com a prática em sala de aula e incorpora o papel das crenças de professores e alunos, levando também em conta o filtro do contexto. Assim, reafirma a ideia inicial de Shulman e Grossman e coloca o PCK novamente no centro da base de conhecimento de professores. Por essas razões, esse modelo parece ter feito uma síntese das principais ideias discutidas, incorporando elementos de modelos anteriores e fazendo uma releitura das ideias originais de Shulman e Grossman para o ensino de ciências. (p.523)

Sendo assim, o PCK em ação é de natureza dinâmica pois não depende apenas do professor. O PCK em ação é mutável a depender da turma em que se leciona, da região, da rede de ensino, entre outros fatores. Então, há um novo questionamento: é possível estudar o PCK pessoal e o PCK em ação de um único professor em um único contexto de aprendizagem?

Por se tratar de uma pesquisa com metodologia de estudo de caso, no qual a pesquisadora não interfere nas ações da professora participante, acreditamos que

haveria complicações em conseguir levantar dados a respeito do PCK pessoal e do PCK em ação do estudo de caso.

Todavia, pesquisas futuras poderão dar continuidade, buscando aproximações com o MCR (2019), utilizando outra metodologia como base para levantamento e análise de dados.

## 2. O ENSINO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.

O conjunto numérico que compreende as frações são os Números Racionais. A pesquisa não irá abordar detalhes desse conjunto numérico na perspectiva da matemática assim como Damico (2007) e Santos Filho (2015) nos quais nos inspiramos. Nessa pesquisa a abordagem será do ponto de vista da educação matemática.

Os números racionais, de acordo com Caraça (1998), surgiram do impasse de comparar grandezas onde, nem sempre era possível identificar um número inteiro de vezes em que uma grandeza cabia dentro da outra grandeza. Ou seja, a divisão não era possível.

Temos como definição de número racional, os números que podem ser escritos na forma  $\frac{a}{b}$ , sendo a e b inteiros e  $b \neq 0$ . Caso a não seja múltiplo de b, esse número pode ser representado na forma decimal, efetuando a divisão entre o numerador e o denominador. O resultado dessa divisão poderá ser um decimal exato ou uma dízima periódica. (Santos Filho, 2015).

Kieren foi um dos primeiros estudiosos que contribuiu para o ensino e aprendizagem dos números racionais. O pesquisador publicou um artigo em 1993 chamando a atenção para o fato de que o conjunto dos racionais são constituídos por subconstrutos: quociente, medida, razão e operador. (Santos Filho, 2015)

Concordamos com o pesquisador ao afirmar que “Para Kieren (1993), o ensino de números racionais deve contemplar o conhecimento intuitivo do estudante, seguir em direção aos subconstrutos até o estágio de formalização”. (Santos Filho, 2015, p. 24).

Ao construir o conceito a partir da fração unitária e a partir do universo da criança, os estudantes, de acordo com Santos Filho (2015), são capazes de resolver problemas corretamente. O obstáculo está em se resolver os mesmos problemas de forma simbólica. Senso assim, partir da fração unitária auxilia na compreensão de conceitos mais abstratos conforme o conhecimento sobre frações for sendo construído.

O pesquisador lança mão do clássico exemplo da pizza:

Essa questão é ilustrada pelas respostas dos alunos ao serem questionados quanto à comparação das fatias de duas pizzas de mesmo tamanho, uma dividida em seis partes iguais e outra dividida em oito partes iguais. Eles não tiveram dificuldades em responder que a pizza dividida em seis partes iguais apresentava a maior fatia, no entanto, esses mesmos estudantes, em situações de avaliação escolar, ao comparar  $\frac{1}{6}$  e  $\frac{1}{8}$  responderam que  $\frac{1}{8}$  é maior que  $\frac{1}{6}$  porque 8 é maior que 6. (Santos Filho, 2015, p.25).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – de sigla BNCC (Brasil, 2018), o ensino dos números fracionários se inicia no 3º ano do ensino fundamental envolvendo noções da fração unitária, com ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima parte. E a cada ano do ensino fundamental, novas habilidades dos números fracionários são adicionadas ao currículo, aprofundando os estudos sobre o assunto. Sendo assim, a ideia da BNCC vai de encontro ao pensamento de Kieren (1993) e de Santos Filho (2015), ao explorar as frações unitárias para auxiliar os alunos a compreender o conceito de número fracionário. De acordo com a BNCC, a formalização do conceito de fração só deverá ocorrer nos anos finais do ensino fundamental. A definição formal do conjunto dos números racionais só é apresentada ao estudante no 8º ano do ensino fundamental. (Brasil, 2018)

Nunes et. al. (2005) afirma que os números que usamos em nosso cotidiano e na sala de aula, representam uma quantidade. Para facilitar o estudo de frações, a pesquisadora apresenta dois termos: quantidade extensiva e quantidade intensiva. A quantidade extensiva se refere na comparação de duas quantidades de mesma natureza, dentro da lógica do parte-todo. Já a quantidade intensiva é referente a relação entre duas quantidades diferentes.

A dificuldade está em se ensinar a quantidade intensiva pois, segundo Nunes et. al. (2005), o ensino de frações é mais focado na relação parte-todo. Geralmente o método utilizado nas aulas é de pintar as partes (numerador) de um todo (denominador). Esse método é criticado pela pesquisadora e seus colaboradores pois limita os significados dos números fracionários.

Para Kerslake (1986) citado por Santos Filho (2015), um estudo realizado com crianças entre 11 e 15 anos concluiu que a fração como parte de um todo foi o único modelo que os alunos se sentiam mais familiarizados, dificultando a compreensão da fração em outras situações.



Os subconstrutos ou significados das frações, na visão de Mometti (2021), contribuem para um processo de ensino e aprendizagem confuso.

Ademais, a ausência de atribuição desse significado, por parte dos alunos, contribui para um movimento de memorização daquilo que é mais próximo daquilo que eles compreendem, ou seja, versa para uma memorização da operacionalização da fração entendida como quociente ou, apenas, como relação de parte-todo. (Mometti, 2021, p. 17)

Nas pesquisas de Behr e colaboradores (1993) citado por Santos Filho (2015), o número racional pode ser compreendido a partir de seis subconstrutos: parte-todo, decimal, razão, quociente, operador e medida. Para os pesquisadores, não basta compreender cada subconstruto, mas também ter o entendimento de como eles se relacionam. Há uma crítica também em como o ensino de números racionais é abordado nos currículos, tendo como ênfase os procedimentos e algoritmos.

“Para esses pesquisadores, o fracasso na aprendizagem dos números racionais é consequência de se priorizar, no ensino desse conteúdo matemático, procedimentos, em detrimento dos aspectos relacionados à compreensão do seu conceito.” (Santos Filho, 2015. p. 28).

Santos Filho (2015) cita Behr et. al. (1983) afirmando que o ensino de números racionais segue três pontos de vista: ponto de vista prático, proporcionando melhor compreensão dos problemas reais do cotidiano; ponto de vista psicológico, auxiliando a desenvolver as estruturas mentais; e ponto de vista matemático, fornecendo uma base para conceitos matemáticos mais complexos como as operações algébricas. Deste modo, relacionando as ideias de Behr et. el. (1983) e de Kieren (1993), “...ênfatisa a ideia de que o número racional deve ser visto primeiro como um conhecimento humano e só posteriormente como uma construção lógica formal.” (Santos Filho, 2015, p.27).

Nesse caso, surgem algumas inquietações: poderia um professor especialista simplesmente afirmar que um aluno do 6º ano tem dificuldades em realizar operações com frações porque não aprendeu, ou não foi ensinado de maneira adequada, nos anos iniciais do ensino fundamental? Será que o professor especialista tem a consciência de quais habilidades devem ser desenvolvidas neste campo nos alunos recém-chegados dos anos iniciais do ensino fundamental? Pois de acordo com o PCK (Ball et. al. 2008), o conhecimento horizontal e vertical do currículo deve estar presente ao lecionar. Embora o objetivo da pesquisa não seja de responder tais questionamentos acerca do professor especialista, sentimos que há necessidade em

se realizar mais pesquisas neste sentido. Como pode-se notar, o ensino e aprendizagem de frações é algo muito complexo para responsabilizar apenas o professor dos anos iniciais ou o estudante.

Todavia, fato é que os números racionais, principalmente na forma de fração, representam um obstáculo para os estudantes. De acordo com Damico (2007):

...a ênfase exagerada nos procedimentos algoritmos e o treinamento exaustivo por intermédio de extensas listas de exercícios repetitivos e descontextualizados acarretam, muitas vezes, um distanciamento entre as operações e a compreensão do significado do cálculo realizado. Quando estas operações envolvem números racionais, o problema se torna ainda maior, como nos mostra a própria história da Matemática. (p.88)

Pommer (2020), ao realizar um levantamento a respeito de estudos de frações unitárias publicados no Brasil entre os anos de 2001 e 2018, constatou que diversas pesquisas em Educação Matemática, como Kieran (1976), Hilton (1980), Behr et. al. (1992), entre outros, apontam para dificuldade em se aprender e em se ensinar os números racionais

Das referidas pesquisas podemos apreender um ponto de convergência: há problemas na construção da ideia de número racional pelos alunos e falta de compreensão dos professores frente à complexidade e amplitude da abordagem de tal assunto no ensino da Matemática Elementar. (Pommer, 2020, p.35).

Então, de acordo com o pesquisador, é fato que os professores possuem certas dificuldades no ensino dos números racionais. Ainda de acordo com Pommer (2020), o Brasil carece de pesquisas relacionadas a fração unitária no cenário da educação continuada, tendo somente uma pesquisa, a de Santos Filho (2015) no período de 2001 e 2018.

Sendo assim, um dos pontos que a pesquisa participativa irá observar, sob a luz do PCK, é a questão de que um professor, com experiência, que busca a formação continuada e que gosta de lecionar matemática, alcançará bons níveis de PCK para lecionar números fracionários. Essa pesquisa, não irá tratar do ensino exclusivo da fração unitária. Mas, compreendemos que em outro momento, a pesquisa poderá se estender para essa questão, pois as frações unitárias se trata da primeira habilidade a ser adquirida pela criança, utilizando dentro de seu próprio contexto. Sem esse conhecimento da fração unitária, entendemos não ser possível alcançar o ponto de vista psicológico e o ponto de vista matemático dos números racionais apontados por Behr et. al. (1983).

### **3. METODOLOGIA**

O estudo procurou investigar e observar aspectos relacionados ao PCK mobilizados pelos professores dos anos iniciais do ensino fundamental no ensino de números fracionários.

Para atingir os objetivos e analisar o fenômeno mencionado, optamos por uma pesquisa de estudo de caso de cunho qualitativo. A seguir, apresentaremos o desenvolvimento da pesquisa e o referencial teórico da metodologia.

#### **3.1 Contexto da pesquisa.**

A presente pesquisa tem por objetivo analisar os domínios de PCK de um professor dos anos iniciais do ensino fundamental ao lecionar um conteúdo tão complexo que são os números fracionários. Para isso, optamos pelo ambiente de sala de aula de uma professora pedagoga que leciona no 5º ano do ensino fundamental em uma escola municipal situada no ABC Paulista.

Essa professora foi escolhida de acordo com nosso referencial teórico de formação de professores (Gatti, 2010, 2016; Pimenta 1996) e referencial teórico de PCK (Shulman, 1987). Para tanto, descrevemos a participante de nossa pesquisa como uma professora com vasta experiência em sala de aula, sente afinidade com a disciplina de matemática, busca sempre participar de formação continuada e que leciona em escola pública. A coleta de dados foi realizada através de gravações audiovisuais das aulas da professora e transcrição das gravações. A professora foi informada que se tratava de uma pesquisa de mestrado e concordou em participar, bem como na utilização dos dados levantados. O nome da participante, dos alunos, da escola e do município serão mantidos em sigilo.

A interpretação dos resultados dos conhecimentos mobilizados ao se lecionar frações para os anos iniciais do ensino fundamental, será realizada através dos referenciais teóricos relacionados ao conhecimento pedagógico de conteúdo.

### 3.2 Referenciais metodológicos.

Entendemos que, de acordo com Ludke e André (2008), a presente dissertação se trata de uma pesquisa qualitativa com observação não participativa de estudo de caso. Por se tratar de uma observação. Entendemos que ao observarmos uma situação, a interpretação pode depender da história pessoal e da bagagem cultural do observador. Por isso, para que realmente se tenham o rigor de uma pesquisa científica, realizamos o planejamento dos pontos a serem observados das aulas da participante da pesquisa bem como das perguntas realizadas na entrevista.

Para que se torne um instrumento válido e fidedigno de investigação científica, a observação precisa ser antes de tudo controlada e sistemática. Isso implica a existência de um planejamento cuidadoso do trabalho e uma preparação rigorosa do observador. (Ludke; André, 2008, p.25)

Para realização da coleta de dados, esta pesquisadora assistiu e gravou as aulas da professora, realizou a entrevista e analisou atividades avaliativas em um período de março a maio de 2023. Optamos pela observação pois, de acordo com Ludke e André, esse método permite que o observador fique mais próximo das vivências e experiências do participante observado, no nosso caso, a professora. “Em primeiro lugar, a experiência direta é sem dúvida o melhor teste de verificação da ocorrência de um determinado fenômeno. “Ver para crer”, diz o ditado popular” (Ludke; André, 2008, p.26)

O Modelo Consensual Refinado (2019) se trata do modelo mais recente de PCK. Devido a essa natureza, ainda há poucos estudos no Brasil na área de matemática com o referencial teórico do MCR. Portanto, esse se trata de mais um motivador na escolha da metodologia de observação de estudo de caso. “Além disso, as técnicas de observação são extremamente úteis para “descobrir” aspectos novos de um problema. Isso se torna crucial nas situações em que não existe uma base teórica sólida que oriente a coleta de dados”. (Ludke; André, 2008, p.26)

A pesquisa se caracteriza por um estudo de caso, pois segundo Ludke e André (2008) se trata de um estudo de um único caso de uma professora, analisando quais e de que modo os elementos do PCK se manifestarão ao longo das aulas de matemática, sendo assim, um caso bem delimitado.

#### 4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A participante da pesquisa se trata de uma professora que leciona em uma turma do 5º ano do ensino fundamental de uma escola pública da região do ABC paulista, com 29 alunos. Participa constantemente de cursos de formação continuada e possui experiência de sala de aula de mais de 20 anos. Senso assim, devido ao perfil dessa profissional, esperamos obter dados muito relevantes a respeito da observação dos elementos do PCK dessa profissional.

As aulas foram gravadas, transcritas e analisadas de acordo com o referencial teórico. Os nomes foram ocultados para preservar o anonimato. Em determinado trecho onde se tem um nome citado, esse nome é fictício.

##### 4.1 Uma conversa descontraída para iniciar:

A professora se mostra muito confortável e inicia a aula já informando que os alunos estudaram o assunto no ano anterior, no caso, no 4º ano, e escreve na lousa “frações”. Temos o seguinte diálogo:

*Professora: Quero ver com vocês o seguinte: o que é que vocês podem me dizer sobre frações? O que vocês entendem sobre fração?*

*Os alunos ficam tímidos e a professora continua a questionar a turma. Um aluno levanta a mão e responde: Algo dividido.*

*Professora: Tá, algo dividido! (E escreve na lousa).*

*Aluno: Conjunto de várias operações.*

*Professora: Como assim? Não entendi.*

*Aluno: Dependendo da lição, precisa dividir e depois multiplicar.*

*Professora: Nem sempre.*

Nesse momento, entende-se que a participante instiga os estudantes a responder e interagir com as próprias palavras, mas sempre estimulando a reformular as afirmações. É possível notar também, que a professora não permeia apenas no

significado da fração como quociente ou parte-todo, que são os campos com maior foco nos anos iniciais do ensino fundamental.

Logo nesse início da aula, já pode-se notar a presença dos subdomínios de PCK de Ball e seus colaboradores (2008). Ao transmitir segurança em dialogar com os alunos, a participante demonstrou conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado do conteúdo.

Embora de forma mais sutil, pode-se notar, através dos diálogos com os alunos, que a professora sabia que seus discentes tinham certo conhecimento de números fracionários e que poderia iniciar a aula fazendo um levantamento prévio do que lembravam e do que conheciam de seu cotidiano, demonstrando conhecimento do horizonte de conteúdo, ou seja, a participante conhecia bem o currículo e a forma com que os conteúdos, nesse caso as frações, se relacionavam. (Ball. et. al., 2008)

#### **4.2 Mas não dá para ficar só no desenho:**

Foi proposto aos estudantes um problema do livro didático referente a fração de uma quantidade. O problema informava que dos 30 ovos,  $\frac{1}{3}$  seriam usados na receita de pudim e o restante dos ovos na receita de bolo. A questão é quantos ovos seriam usados para fazer pudim e quantos seriam usados para fazer bolo. A professora fez a representação gráfica dessa situação, desenhando os ovos. Os alunos conseguiram compreender que  $\frac{1}{3}$  seriam 10 ovos e que o restante, ou seja, 20 ovos, seriam para o bolo. No entanto, quando percebeu que os alunos estavam compreendendo, a professora continua:

*Professora: mas não dá para ficar só no desenho. Então precisamos praticar sem o desenho. Antes, registrem no caderno e escrevam as respostas no livro.*

*Professora: agora nós temos outro probleminha, mas agora vamos tentar não usar desenho. Uma trilha tem 60 Km de extensão, dos quais Evandro percorreu  $\frac{3}{5}$  de bicicleta. Quantos quilômetros dessa trilha Evandro percorreu de bicicleta? Vamos lá gente, resolvendo juntos. O que precisamos fazer?*

*Alunos: dividir por 5, que dá 12.*

*Professora: Tá, 60 dividido por 5 que vai dar 12. Mas o que corresponde esse 12 então?*

*Aluno: cada pedaço da trilha.*

*Professora: e isso em fração é?*

*Aluno:  $\frac{1}{5}$*

*Professora:  $\frac{1}{5}$  de 60 = 12. E agora? Cada parte vão ser 12 km. E  $\frac{3}{5}$  ?*

*Aluno: professora, ele já andou 36 km*

*Professora: e como você chegou nesse número?*

*Aluno: 12 vezes 3, que dá 36*

*Professora: tá certo. Então o que fizemos primeiro? 60 dividido por 5, que é o denominador. Aí encontramos 1 parte,  $\frac{1}{5}$ . Depois multiplicamos por 3, que é o numerador para encontramos a quantidade de 3 partes,  $\frac{3}{5}$ . Alguém pode resumir melhor?*

*Aluno: Você pega o total e divide pelo denominador e depois multiplica pelo numerador.*

*Professora: agora vamos registrar no caderno e a resposta no livro.*

Embora o problema citado seja direto, com o enunciado não questionando a fração unitária, no caso  $\frac{1}{5}$  de 60 km, a professora busca o relato dos estudantes, levando-os a compreender que, de qualquer forma é importante conhecer o resultado da fração unitária antes de partir de fato para a resposta da quantidade de  $\frac{3}{5}$  de 60 km.

Nesse ponto da aula, podemos notar a presença do conhecimento especializado do conteúdo. O objetivo era resolver o problema sem o recurso gráfico, porém, ao lançar mão da fração unitária, os alunos conseguiram compreender o

cálculo de fração de um número ou quantidade. De acordo com Ball et. al. (2008), para além de ter o conhecimento matemático, o professor precisa ter a habilidade de buscar alternativas de resolução, visando facilitar a compreensão e aprendizagem dos estudantes. A professora poderia não ter o cuidado de utilizar a fração unitária na resolução do presente problema, demonstrando ter somente o conhecimento comum de conteúdo. Porém, dada a peculiaridade do ensino de frações, a participante usou estratégia específica, que segundo Testoni (2013), se trata de um conhecimento específico do professor ao lecionar, ou seja, o conhecimento especializado de conteúdo. Ao buscar o recurso da fração unitária, a professora fez uma tarefa exclusiva do docente. Somente na sala de aula se pensaria em partir da fração unitária.

Outro ponto interessante foi partir para o cálculo prático, estimulando o aluno a responder que, para solucionar problemas envolvendo fração de uma quantidade, basta dividir o total pelo denominador e depois multiplicar pelo numerador. Todavia, até chegar ao comentário do aluno, a professora partiu da representação gráfica, passou pela fração unitária, para finalmente formalizar a resolução do problema. Nesse trecho da aula, o conhecimento do conteúdo e ensino se tornou presente, pois a participante demonstrou conhecimento matemático de instrução, ordenado o conteúdo de maneira adequada. A linguagem utilizada pela professora, embora menos técnica em comparação ao professor especialista de matemática, se mostrou pertinente para atingir o máximo de alunos do 5º ano, novamente indo de encontro a Ball e seus colaboradores (2008), destacando que é possível notar esse conhecimento específico na maneira como o conteúdo é abordado em sala de aula, através do planejamento e ordenação, bem como o uso de linguagem adequada.

Ball et. al. (2008) ressalta que o conhecimento do professor a respeito da organização do conteúdo dentro do currículo, e a forma como esses conteúdos se relacionam, deve estar presente nas aulas de modo a facilitar a aprendizagem. A preocupação com a formalização mínima por parte da professora ao partir para o cálculo de  $\frac{3}{5}$  de 60 sem o uso de recursos gráficos e refinando a linguagem conforme foram passando as aulas, demonstra que a participante tem um conhecimento do horizonte do conteúdo, compreendendo os conceitos que os alunos irão estudar no futuro.

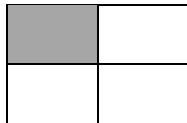


Deste modo, notamos que a professora partiu do conhecimento intuitivo do estudante até buscar a formalização, conforme ressalta Santos Filho (2015)

### 4.3 Compreendendo as falas dos estudantes:

No conhecimento especializado de conteúdo, o docente além de ter conhecimento de frações, precisa ter conhecimento de frações no campo do ensino. A participante, a todo momento das aulas, buscou estimular a fala dos alunos e criar ponte entre as afirmações dos estudantes e a linguagem matemática. A professora sabia que os alunos, que estavam no 5º ano, já haviam estudado os números fracionários no ano anterior. Iniciou a aula perguntando o que eles lembravam de fração e no início não se obteve muitos comentários dos alunos. Notem o seguinte trecho:

*A professora a todo momento estimula os alunos a falar sobre o significado das frações. Apesar de instigar mais os alunos, as crianças brincam dizendo que foram abduzidas nas férias e que não lembram de mais nada. A professora ri, solta alguma piada e começa a ajudar, desenhando na lousa um quadrado dividido em quatro partes iguais e pintando uma parte.*



*Aluno: Ah isso é um quarto.*

*Aluno: pode ser visto como uma forma de medida.*

*Professora: Forma de medida?*

*Aluno: Sim! Um quarto de xícara de chá.*

*Professora: Ah! Muito bem!*

*E registra na lousa a informação da medida*

A professora, conforme passam as aulas, estimula os alunos reformularem seus comentários:

*Professora: alguém pode me dar exemplos de onde usamos a fração?*

*Aluno: para fazer um bolo você precisa de  $\frac{1}{3}$  de leite.*

*Aluno: fração é usada meio que para dividir.*

*Professora: certo, então vamos lá (e escreve na lousa) é usada como medida, para dividir.*

*Aluno: a pizza tem 8 pedaços e eu comi um pedaço.*

*Professora: posso dizer então que é uma parte do total ou do inteiro?*

*Alunos: sim.*

*Professora: agora, quando eu tenho essa fração  $\frac{1}{2}$ , o que representa cada número?*

*Aluno: o 1 é numerador e o 2 é denominador.*

*Professora: você concorda, Caio?*

*Aluno: sim.*

*Professora: está certo.*

Nos dois trechos das aulas, os alunos se sentem à vontade para fazerem suas afirmações acerca das frações, enquanto a professora continua a construir os registros na lousa. Para além do conhecimento comum do conteúdo, que não é algo exclusivo do professor (Ball et. al., 2008), a participante demonstrou conhecimento específico do conteúdo ao compreender os exemplos e as afirmações de seus estudantes. Segundo Ball e seus colaboradores (2008), o professor se depara com vários tipos de soluções de seus alunos e precisam descobrir se o pensamento matemático está correto ou não, ou se a abordagem dos alunos funcionaria de maneira geral. Realizar essas análises não é uma tarefa simples para aqueles que tem apenas o conhecimento comum do conteúdo, ou nesse caso, conhecimento apenas sobre frações. (Ball et. al. 2008).

#### 4.4 Meio quilo é igual a 500 gramas.

No trecho seguinte, a professora insiste em perguntar o motivo de meio quilo ser 500 gramas. Para a maioria dos alunos, é automático pensar que meio quilo é equivalente a 500 gramas, porém a professora queria enfatizar a questão de se trabalhar com unidades de medidas equivalentes. Ou seja, meio quilo é igual a 500 gramas, pois 1 quilo é igual a 1000 gramas.

*Em um exercício do livro didático, uma barra de 1 kg chocolate está dividida em duas partes iguais e a menina vai usar  $\frac{1}{2}$  da barra para a receita. O exercício pergunta quantos gramas a menina vai usar na receita. Eles respondem o exercício bem rápido, meio quilo. A professora vai até a lousa, desenha a barra dividida ao meio e repete a pergunta. Os alunos respondem meio quilo e outros 500 gramas.*

*Professora: mas quantos gramas?*

*Aluno: 500 gramas*

*Professora: exato 500 gramas que é igual a  $\frac{1}{2}$  de 1 quilo.*

*Mas porque que é 500?*

*Aluno: porque é metade de 1 quilo.*

*Professora: tá, mas por que é 500?*

*Aluno: porque 500 mais 500 dá 1 kg*

*Professora: mas por que lá eu falo grama e aqui eu falo quilo? Quanto é um quilo em gramas?*

*Aluno: 1 quilo são 1000 gramas.*

*Professora: muito bem!*

Parece um fato corriqueiro, todavia essa insistência da professora em instigar os estudantes a refletir a respeito das unidades de medida de massa é importante para que os alunos compreendam com mais facilidade certos conceitos que serão estudados ao longo do ensino fundamental. Meio quilo equivale a 500 gramas, pois metade de 1000 é igual a 500 gramas. Seria interessante se a participante tivesse perguntado quanto corresponde  $\frac{1}{4}$  de um quilo. Será que os alunos responderiam com a mesma facilidade? Não tem como a pesquisa responder.

Mas o fato é que nesse momento, pode-se notar o conhecimento de horizonte do conteúdo, que ajudou na tomada de decisão de prolongar o assunto referente a unidade de medida de massa. Ball e seus colaboradores (2008) afirmam que ter esse conhecimento significa enxergar conexões entre o que se está ensinando no presente com ideias matemáticas posteriores. De acordo com a BNCC (2018), medidas de massa começam a ser estudadas logo no 1º ano do ensino fundamental, comparando as medidas entre mais leve ou mais “pesado”. A introdução das unidades de medida de massa, tanto as não padronizadas quanto as padronizadas, se iniciam no 2º ano do ensino fundamental. A habilidade de reconhecer que uma medida de massa pode ser expressa por diferentes números dependendo da unidade de medida escolhida é trabalhada no 3º ano do ensino fundamental. Em todos os anos ao longo do ensino fundamental, está presente o estudo de grandezas e medidas, incluindo a unidade de medida de massa. No 6º ano, os alunos terão de resolver e elaborar problemas envolvendo as unidades de medida de massa. Portanto, enfatizar a questão de que meio quilo é igual a 500 gramas, pois um quilo equivale a 1000 gramas, tem a intenção de reforçar os estudos dos anos anteriores e auxiliar na aprendizagem dos anos posteriores. (Brasil, 2018).

A ação da professora em ouvir seus estudantes e interpretar suas respostas, buscando afirmações coerentes, até que se chegue em uma resposta satisfatória, demonstra o conhecimento do conteúdo e estudantes. A professora sabia que seus alunos chegaram na resposta correta de 500 gramas, mas queria ouvir deles o motivo dessa resposta. A professora tinha a experiência e o conhecimento dos estudantes, pois tinha a certeza de que ouviria dos alunos uma justificativa satisfatória.

O conhecimento especializado do conteúdo também foi demonstrado. A professora conseguiu fazer com que os alunos afirmassem que 500 gramas correspondem a  $\frac{1}{2}$  quilo, porque um quilograma equivale a 1000 gramas. Porém, a resposta aconteceu após a participante reformular suas perguntas. “Mas por que lá eu falo grama e aqui eu falo quilo? Quanto é um quilo em gramas?” Esse trabalho envolveu um tipo de conhecimento que é puramente do ensino. Essa mesma situação, fora do ambiente escolar, não teria acontecido da mesma forma. (Ball. et. al., 2008).

#### 4.5 O clássico problema parte-todo.

A relação parte-todo é o subconstruto das frações mais estudado ao longo da vida escolar e amplamente apresentados nos tradicionais modelos de pizza ou chocolate, dividido em partes, ou ainda as bolinhas de gude coloridas. (Damico, 2007). Esse subconstruto é muito importante tanto para a compreensão dos números racionais, quanto para a aprendizagem de conceitos mais complexos.

Por se tratar de um conceito básico na compreensão dos números racionais, concordamos com Kieren (1981), ao dizer que esse subconstruto é uma importante linguagem a ser construída por ser de fundamental importância para o entendimento de interpretações posteriores mais complexas. (Damico, 2007, p.68)

Em dado momento da aula, a professora propõe um clássico exercício de parte-todo, vejam: Das 9 bolinhas que Bruno tem, 4 são verdes, 3 são vermelhas e 2 são azuis. Podemos dizer que  $\frac{4}{9}$  (quatro nonos) das bolinhas que ele tem são verdes.

$$\frac{4 \text{ número de bolinhas verdes}}{9 \text{ número total de bolinhas}}$$

A professora lê com os alunos essa informação e faz uma série de questionamentos. Chamamos a atenção para o seguinte trecho que contém o diálogo entre a professora e um dos alunos a respeito da fração que representa o total das bolinhas:

*Aluno: a fração que representa o total de bolinhas é  $\frac{1}{9}$ .*

*Professora:  $\frac{1}{9}$  é uma bolinha de 9. Se eu tenho 9 bolinhas, para dizer que eu tenho todas...*

*Aluno: nove e meio?*

*Professora: por que nove e meio?*

*Professora espera um tempo e vai para a lousa calmamente e começa a desenhar as bolinhas enquanto fala:*

*“pessoal, tenho 9 bolinhas, se eu pegar 1 é  $\frac{1}{9}$ , se eu pegar tudo?”*

*Aluno:  $\frac{9}{9}$ ?*

*Professora: isso mesmo*

A espera, a paciência e as perguntas da professora deram tempo para o aluno pensar. A resposta não foi dada rapidamente pela participante. Ao contrário, a cada resposta equivocada do aluno, a professora levava-o a refletir sobre suas respostas, até que o estudante conseguiu compreender que a fração do total de bolinhas era  $\frac{9}{9}$ . “Partindo das concepções limitadas ou errônea dos estudantes, o professor pode ajudá-los a construir conceitos mais sofisticados.” (Damico, 2007, p.44).

O conhecimento do conteúdo e estudantes se mostrou presente nesse momento, pois Santos Filho (2015) afirma que “ouvir e interpretar os pensamentos incompletos e emergente dos estudantes, na linguagem deles, são situações que caracterizam o conhecimento do conteúdo e estudantes”. (p. 45)

#### **4.6 A experiência sendo primordial no conhecimento dos estudantes:**

A participante da pesquisa leciona há muitos anos na mesma unidade de ensino para turmas de 5º ano do ensino fundamental. Afirma gostar de matemática e costuma ter um bom relacionamento com seus alunos. Ao entrar na sala de aula, notamos a postura firme da professora, mas ao mesmo tempo descontraída, deixando os discentes a vontade para comentar e esclarecer dúvidas a respeito do conteúdo abordado.

Para lecionar o professor precisa prever os pontos que seus alunos terão facilidade ou dificuldade, e a experiência é um ponto chave de se obter o conhecimento do conteúdo e estudantes. (Ball et. al. 2008). Em determinado momento da aula, a professora percebeu que os alunos não entenderam o que ela havia explicado pelas reações dos estudantes.

*Professora: Vejam os 30 ovos na lousa divididos por 3.*

*Temos 10 ovos em cada fileira. No total dos 30 ovos temos  $\frac{1}{3} +$*

*$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ , que vai dar um inteiro. Estão vendo, não mudamos a*

*divisão. Essa é uma forma de calcular pois se cada  $\frac{1}{3} = 10$ ,*

temos  $10 + 10 + 10 \cdot \frac{1}{3}$  para pudim foram 10, aí foram usados  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ , ou seja,  $10 + 10$  para fazer o bolo. 20 ovos.

*Professora: Conseguiram entender?*

*Alunos: Sim!*

*Professora: Ah que cara de mentira! Vou explicar de outra forma. Primeiro nós calculamos  $\frac{1}{3}$  do total. Então cada parte, cada  $\frac{1}{3}$  é 10. Se ela usou 1 parte para pudim e 2 para bolo, usou 10 e usou 20.*

*Professora: Vamos voltar para o livro. Olha outra pergunta:  $\frac{1}{6}$  de 30 ovos são quantos ovos? E  $\frac{5}{6}$ ?*

*Aluno: Agora vamos ter que dividir em 6 partes, que vai dar 5 ovos.*

*Professora: Então quanto é  $\frac{1}{6}$  de 30? Quanto tem em 1 parte só?*

$$\frac{1}{6} \text{ de } 30 = 5$$

$$\frac{5}{6} \text{ de } 30 = ?$$

*Aluno: Eu sei prô! Se uma parte são 5, eu quero saber 5 partes, então vai dar 25.*

*Professora: muito bem! Então  $\frac{5}{6}$  de 30 = 25 ovos.*

Realmente, a primeira parte da explicação da professora, se mostrou um tanto quanto confusa para os alunos presentes na aula. E, mesmo os alunos afirmando que sim, que haviam compreendido a explicação, a professora notou na reação dos estudantes que na verdade não haviam entendido nada. Além do conhecimento do conteúdo e estudantes, a professora demonstrou conhecimento especializado de conteúdo. Pois, interpretou a reação dos alunos de modo assertivo e logo após buscou

novos modelos e adequação da linguagem para que os alunos compreendessem o problema proposto. De acordo com Ball et. al. (2008), os subdomínios do PCK podem se misturar e muitas vezes encontramos dificuldades em categorizar ou distinguir os conhecimentos.

Concordamos com Damico (2007) ao afirmar que:

Em suma, ensino de maneira responsável requer que os professores trabalhem continuamente para conhecer os estudantes. Para ajudarem os seus alunos a desenvolver o entendimento do assunto, os professores têm necessariamente de escutar os estudantes – empregando, para isto, o seu próprio conhecimento do assunto, sem ser limitado por ele. A um professor que saiba pouco do assunto, ou que saiba somente de maneira compartimentalizada e rígida, pode faltar a introspecção necessária para entender as múltiplas concepções das crianças. (p.45)

A pesquisa entende que seria muito difícil um professor em início de carreira ter esse conhecimento dos estudantes e conteúdo tão aguçado. Concordamos com Mizukami (2004) ao afirmar que:

É importante, por fim, que se considere que embora Shulman não coloque em forma destacada o *conhecimento da experiência* como uma categoria da base de conhecimento, a experiência está presente em todo o processo de raciocínio pedagógico, a ser considerado a seguir, e é condição necessária (embora não suficiente) para a construção do conhecimento pedagógico do conteúdo por parte do professor. (p.40).

#### **4.7 O que é convencional?**

A linguagem utilizada pela professora participante foi o elemento mais notado nesse trecho da aula, buscando facilitar a compreensão por parte dos estudantes. O trecho transcrito a seguir, ocorreu no início de uma aula em que a professora estava recordando a aula do dia anterior, referente a leitura das frações.

*Professora: o numerador recebe o número convencional, um, dois, três, podemos chamar assim? Porque se registrarmos natural fica fácil de esquecer.*

*Aluno: professora, existe essa palavra, convencional?*

*Alunos dão risada.*

*Professora: claro!*

*Aluno: você acha que a professora ia falar pra gente uma palavra que não existe?*



*Professora: claro que ia! (brincando e todos riram) mas convencional existe, sim. Vamos ver o significado no dicionário: relativo à convenção ou que dela resulta, que é de uso ou de praxe, consolidado pelo uso ou pela prática. Voltando as frações...*

*Professora: o numerador recebe o número convencional, um, dois, três, vinte e cinco etc. O denominador recebe o nome ordinal, terço, quarto, quinto, até nono. Por quê?*

Podemos notar que a participante trocou “número natural”, ou até mesmo cardinal, por “número convencional” pensando em facilitar a compreensão dos alunos. Porém, um dos alunos desconhecia a palavra convencional, tendo, portanto, que a professora explicasse o significado. Ball et. al. (2008) ressalta que os professores, devem ter um conhecimento matemático descomplicado porque o ensino envolve tornar os recursos de um determinado conteúdo visíveis e aprendíveis pelos alunos. Tentar facilitar a linguagem nesse trecho da aula, demonstrou o conhecimento de conteúdo e ensino. A palavra convencional não foi reconhecida por um de seus estudantes, porém a professora teve o cuidado de explicar de maneira adequada o significado da palavra desconhecida pelo aluno.

O conhecimento do conteúdo e estudantes novamente se mostra presente, pois de acordo com Ball et. al. (2008), tentar prever onde seus alunos terão dificuldades ou facilidades, faz parte desse subdomínio.

Mizukami (2004) enfatiza a ideia de Shulman de que é importante transformar as ideias para facilitar a compreensão dos alunos.

Para Shulman (1987) ideias compreendidas devem ser transformadas, de alguma forma, para serem ensinadas. O processo de transformação envolve combinação de quatro subprocessos que, conjuntamente, produzem um plano, um conjunto de estratégias para uma aula, uma unidade ou um curso. Essas formas de transformação, esses aspectos do processo pelo qual o professor se move de uma compreensão pessoal para possibilitar a compreensão de outros, são a essência do ato de raciocínio pedagógico. (p.41)

#### 4.8 O denominador igual a zero

O trecho transcrito a seguir, se trata de um dos momentos mais interessantes da aula e da pesquisa. E pode-se pensar em algumas hipóteses. A professora estava retomando como se lê uma fração, pois na aula do dia anterior, os alunos já haviam discutido o assunto. Até que surge o questionamento de como se lê uma fração com denominador igual a zero.

*Professora: E essa fração  $\frac{3}{15}$  como se escreve?*

*Aluno: três décimos e cinco.*

*Professora: Oi?*

*Aluno: Não! É três quinze avos. A gente aprendeu isso ano passado*

*Professora: E por que o 15 chamamos de avos?*

*Aluno: Porque é maior do que 10.*

*Aluno: a partir do 11?*

*Aluno: mas e se tiver o zero em baixo? É zero avos?*

*Professora: Mas existe isso?*

*Alunos: Não!*

*Professora: Ah então parou ne?!*

Ainda que a grande maioria dos alunos tenham respondido que não existe “zero em baixo”, ou denominador igual a zero, a professora poderia ter demonstrado o porquê, explorando um pouco mais esse diálogo. Mas a professora agiu com naturalidade e segurança nesse momento, demonstrando conhecimento comum do conteúdo. Ball et. al. (2008) afirmam que, se o professor comete erro nos cálculos ou utiliza termos inadequados, o tempo da aula era desperdiçado e o ensino prejudicado. Então, o conhecimento comum da matemática é importante e de fato, a professora não utilizou nenhum termo inadequado.

Todavia, a pesquisa levanta algumas hipóteses. A primeira hipótese é que nesse momento específico da aula, faltou o conhecimento especializado de conteúdo. A participante, no entendimento da pesquisa, perdeu uma rica oportunidade de ensino e aprendizagem de frações. A simples ação de perguntar aos alunos o porquê de não

existir denominador igual a zero faria muita diferença. Seria muito interessante ter presenciado as respostas dos alunos e as afirmações da professora nesse instante, perdendo a oportunidade de uma bela demonstração de conhecimento especializado de conteúdo. Isso não significa que a participante não tem o conhecimento especializado, pois em outros momentos pode-se notar esse elemento do PCK.

Uma segunda hipótese é que a professora pode ter escolhido não tratar desse assunto nesse instante e esperar os avanços do ensino de frações no decorrer das aulas para explorar a não existência de denominador igual a zero. Nesse caso, a participante estaria demonstrando conhecimento de conteúdo e ensino. Ball et. al. (2008) ressalta a importância de o professor ponderar o momento que determinado assunto será abordado. Pode ser que, do ponto de vista da professora, seria mais proveitoso esperar que esse assunto fosse abordado pelo professor especialista no 6º ano do ensino fundamental. A pesquisa não tem como comprovar nenhuma dessas hipóteses até o momento.

#### **4.9 O conhecimento em diversas áreas:**

Para além da matemática, o conhecimento do conteúdo e currículo prevê que o professor precisa ter o conhecimento dos conteúdos das outras disciplinas. Portanto, neste caso seria importante que a participante tivesse a maestria de correlacionar os números fracionários do componente curricular da matemática com conteúdo de outros componentes curriculares, como ciências ou geografia, por exemplo.

Há um trecho da aula em que um aluno citou a partitura musical, porém não ficou claro para o restante da sala como a fração se relaciona com a música.

*Aluno: professora, eu estudo música desde os 5 anos e as notas musicais têm frações*

*Professora: São duas notas em quatro compassos, é isso? Vamos acrescentar na pauta de música.*

*Aluno: afirma com a cabeça e desenha na lousa a partitura.*

Houve uma tentativa por parte do aluno em encontrar uma aplicação da fração no campo da música, porém a professora participante não parecia compreender com

segurança o exemplo do aluno. A música não faz parte do currículo municipal da cidade onde a professora leciona. A pesquisa entende que, os professores não conseguem ser peritos em todos os campos do conhecimento. Isto posto, a incompreensão da ligação entre a música e as frações por parte da professora não a desqualifica. Todavia, a pesquisa não encontrou elementos de conhecimento de conteúdo e currículo no ensino de frações por parte da professora participante ao longo das aulas observadas.

## 5. CONSIDERAÇÕES

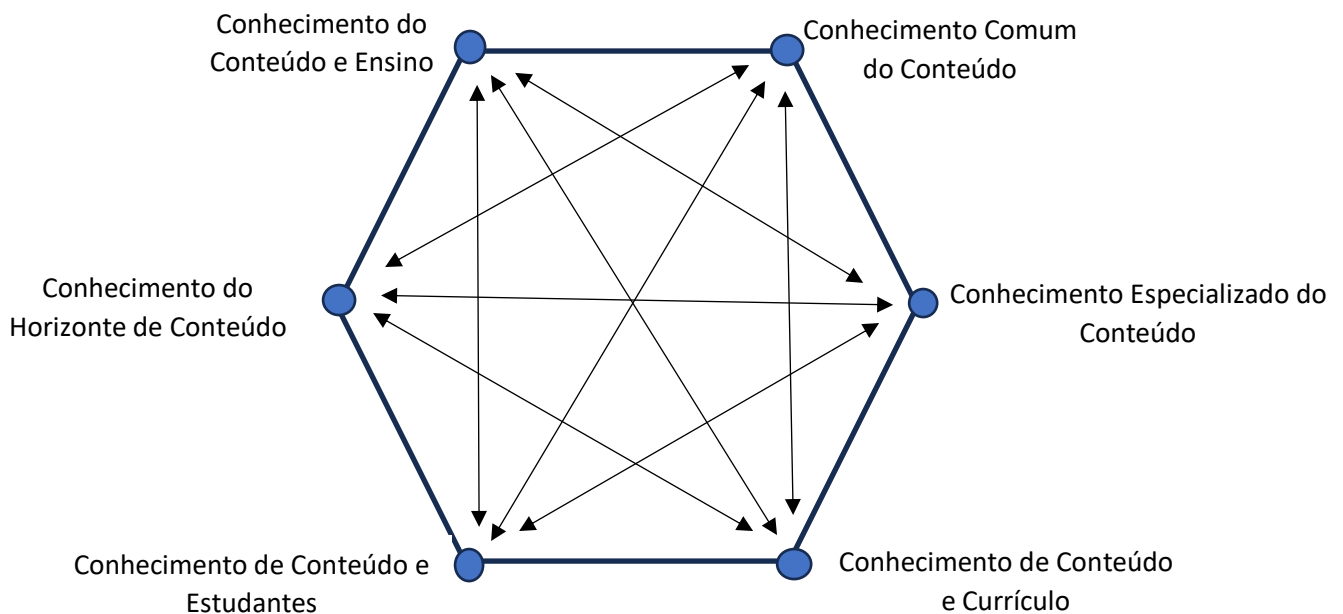
Neste trabalho, observamos as aulas de uma professora experiente dos anos iniciais do ensino fundamental, analisando o PCK da participante no ensino de frações no 5º ano.

Ao iniciar a pesquisa, a expectativa era verificar se os subdomínios do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK) da pesquisadora Ball, Thames e Phelps (2008) seriam encontrados ao longo das aulas da professora participante. Todavia, não apenas os subdomínios fazem parte do conhecimento da professora, mas também foi possível observar o PCK fluindo ao longo das aulas sobre frações.

A profissão docente requer constante formação, visto que as necessidades de nossa sociedade estão em constante renovação. A primeira formação do professor, a licenciatura, é deveras muito importante na construção do profissional, porém não se deve negligenciar a formação continuada de qualidade (Pimenta, 1996). Outro ponto da profissão docente é que, de acordo com o ENADE 2021, apenas 64% dos licenciados têm a pretensão de lecionar em escolas públicas. Com essas informações, a pesquisa buscou encontrar um participante com o seguinte perfil: ter por hábito a participação em cursos de formação continuada, lecionar em escola pública e ter experiência em sala de aula. A professora participante leciona a mais de 20 anos na região do ABC paulista e teve como primeira formação o magistério e logo em seguida o curso de pedagogia. A escolha da participante foi fundamental para que houvesse uma observação satisfatória do PCK.

Ao analisarmos os dados, primeiro houve a tentativa, com as aulas transcritas, de produzir a escrita dos dados por tópicos dos subdomínios do PCK de Ball et. al. (2008). Entretanto, essa organização não ficou coerente e assim, notamos que os subdomínios do PCK não podem ser encontrados ou observados de maneira dissociada. Elucidando, em um mesmo trecho da aula, pode-se notar mais de um subdomínio do PCK ao mesmo tempo. Nem todos os subdomínios estão presentes no mesmo trecho da aula, porém dificilmente um subdomínio será observado de modo isolado. Para representar essa hipótese, propomos o seguinte diagrama:

**Figura 4:** Proposta de diagrama para o modelo de PCK de Ball e seus colaboradores (2008)



A representação gráfica proposta por esta pesquisa, ilustra a ideia de que os subdomínios do PCK de Ball e seus colaboradores (2008) estão interligados e ambos possuem o mesmo grau de importância no ensino.

Ball e seus colaboradores (2008), afirmam que um dos problemas encontrados ao longo da pesquisa é justamente tentar classificar uma situação de ensino em determinado subdomínio do PCK. Às vezes, uma mesma situação de aprendizagem pode ser classificada como conhecimento especializado do conteúdo e também, como conhecimento de conteúdo e estudantes. Nos deparamos com esse mesmo problema ao analisar os dados.

Pode-se observar, ao longo das aulas, que a professora participante demonstra segurança e naturalidade ao ensinar frações, aplicando uma linguagem adequada para alunos do 5º ano, levando também em consideração que o estudo de frações terá continuidade ao longo da vida escolar dos estudantes. Com isso, o conhecimento comum de conteúdo, o conhecimento do horizonte de conteúdo e o conhecimento especializado do conteúdo estiveram presentes.

Ao ouvir os estudantes e interpretá-los, a professora demonstrou o conhecimento especializado do conteúdo, mas também o conhecimento de conteúdo e estudantes. Em diversos trechos das transcrições das aulas, a participante instiga

os estudantes a participar das aulas, a relembrar conceitos de frações ensinados em anos anteriores e refinar as próprias falas. Os alunos trouxeram exemplos e questionamentos que a professora soube interpretar.

Quanto ao conhecimento de conteúdo e currículo, ao longo desta pesquisa não foi possível observá-lo. Isso não quer dizer que a participante não tenha esse subdomínio do PCK. Partimos da hipótese que a professora pode ter mais facilidade em demonstrar esse conhecimento ao lecionar outros conteúdos, tanto na disciplina de matemática, quanto nas demais disciplinas. Podemos pensar que, até mesmo no ensino de frações a professora poderia ter demonstrado esse conhecimento em outras aulas que não foram observadas ao longo da pesquisa.

Acreditamos que o fator experiência na escolha da professora participante, foi de extrema relevância, contribuindo para que o PCK se tornasse presente nas aulas observadas. Nesse sentido, Mizukami (2004, p.25) ressalta que:

Embora a base de conhecimento acadêmico seja necessária ao exercício profissional, ela não é suficiente. Profissionais aprendem a profissão também no exercício profissional, tanto individualmente quanto em termos de comunidades inteiras de prática e as lições da prática deveriam ter uma forma de informar e co-dirigir o próprio desenvolvimento do conhecimento da academia.

No futuro, este trabalho têm a intenção de analisar o PCK de professores em início de carreira. Seria muito interessante poder observar as mentes recém-formadas e com conceitos e metodologias mais recentes, tanto na área de matemática, quanto de formação de professores, atuando em sala de aula. Porém, esta pesquisa concorda com Shulman (2014) ao considerar o professor veterano:

O que esses estudos mostram é que o conhecimento, a compreensão e as habilidades que os principiantes exibem com hesitação, mas às vezes magistralmente, aparecem com facilidade no especialista. À medida que estudávamos nossos casos, sempre perguntávamos o que os professores sabiam (ou não) que lhes permitia ensinar de uma certa maneira. (p.201)

Não foram encontrados elementos facilitadores para a aprendizagem como materiais lúdicos, uso da tecnologia e materiais manipuláveis. Todavia, esse fato não significa que a participante não tenha aplicado esses materiais em aulas que não foram observadas. Não obstante, a pesquisa não desabona as aulas ou a professora, pois a intenção da pesquisa não foi quantificar o conhecimento da participante ou seu PCK. O objetivo da pesquisa foi atingido ao observar os subdomínios do PCK de Ball et. al. (2008) fluírem ao longo do ensino de frações.

A pesquisa não se estendeu para o campo das frações unitárias. Todavia, ao rever inúmeras vezes as gravações audiovisuais das aulas, é notório o quão relevante seria explorar esse tema. Os alunos conseguiram compreender melhor a fração de uma quantidade, ou o subconstruto operador, quando a professora perguntou trabalhou antes as frações unitárias, deixando de lado a mecanização do “divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”.

O Modelo Consensual Refinado (2019) seria um referencial teórico muito interessante para a análise de dados, por se tratar do modelo de PCK mais atual. Porém, o fator tempo e a metodologia adotada em observar apenas as aulas não permitiram analisar o PCK pessoal, o PCK em ação e o PCK coletivo da professora participante. Para além da observação das aulas, seria importante coletar as informações acompanhando a professora participante no ambiente escolar fora da sala de aula, através das reuniões pedagógicas, na sala dos professores em contato com os colegas bem como em entrevista. Portanto, a pesquisa tem uma perspectiva de continuidade quanto aos estudos sobre PCK, levando em consideração tanto os estudos de seu precursor Shulman (1986), quanto os estudos de Ball (1988) e Ball et. al. (2008) que permitiram o embasamento teórico desse trabalho, porém permitindo a coleta e análise de dados sob a perspectiva do Modelo Consensual Refinado (2019).



## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais de Matemática**. Lisboa, Portugal: Gradiva, 1998.

CARLSON, J.; DAEHLER, K. R. The Refined Consensus Model of Pedagogical Content Knowledge in Science Education. In: A. Hume et al. (eds.). *Repositioning Pedagogical Content Knowledge in Teachers' Knowledge for Teaching Science*. Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2019, p. 77-92.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

BALL, D. L. **Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education**. 1988. Tese (Doutoramento) – Michigan State University, East Lansing.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, 59, p. 389-407, 2008

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. Tese de doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2007.

FERNANDEZ, C.; GÓES, L. F. Conhecimento pedagógico do conteúdo: estado da arte no ensino de ciências e matemática. In: A. Garriz, S. F. D. Rosales, & M. G. Lorenzo. (Orgs.). *Conocimiento Didáctico del Contenido. Una perspectiva Iberoamericana* (pp.65-99). 1ed. Saarbrücken, Alemanha: Editorial Académica Española. 2014.

FERNANDEZ, C. Revisitando a base de conhecimentos e o conhecimento pedagógico do conteúdo (pck) de professores de ciências. *Revista Ensaio*. Belo Horizonte, v. 17, n. 2, p. 500-528, maio-ago, 2015.

GATTI, B. A. Formação de professores no Brasil: Características e problemas. **Educação & Sociedade**, v. 31, n. 113, outubro-dezembro, p. 1355-1379, 2010.

GATTI, B. A. Formação de professores: Condições e problemas atuais. **Revista Internacional de Formação de Professores**. Itapetininga, v. 1, n. 2, p.161-171, 2016.

MEDRANO, E. F.; MONTES, M. A.; CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; CATALÁN, M. C. M.; LIÑÁN, M. M. El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 204 – 221, abr. 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10>. Acesso em: 27 abril 2021.

MIZUKAMI, M. G.N.; Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman. **Revista do Centro de Educação**, v.29, n. 2, 2004.

MOMETTI, C. O ensino de frações nos anos iniciais: um estudo cultural com professores polivalentes. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 07, p. 01-32, 2021.

NUNES, T; CAMPOS, T. M. M; MAGINA S.; BRYANT P. **Educação matemática 1: números e operações numéricas**. São Paulo. Editora Cortez, 2005.

PIMENTA, S. G. Formação de professores: saberes da docência e identidade do professor. **Revista da Faculdade de Educação**, v. 22, n. 2, p. 72–89, 1996.

POMMER, W. M. Frações unitárias: um levantamento de dissertações e teses brasileiras publicadas entre 2001 e 2018. **Ensino de matemática em debate**. São Paulo, v. 7, n. 1, p. 34-70, 2020.

SANTOS, J. F. F. **Investigando como professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com números racionais.** Dissertação de mestrado. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

SCHÖN, D. **The reflective practitioner: how the professional think in action.** New York: Basic Books, 1983.

SCHÖN, D. **Educating the reflective practitioner: toward a new design for teaching and learning in the professions.** San Francisco: Jossey-Bass, 2012, p. 1987. 376

SHULMAN, L. S. **Knowledge and teaching: foundations of a new reform.** Harvard Educational Review, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SHULMAN, L. S. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. **Cadernos Cenpec**, São Paulo, v.4, n.2, p.196 - 229, 2014

SILVA, A. N. e FERNANDEZ, C. **Um professor de química, um conteúdo e dois contextos escolares: do PCK pessoal para o PCK em ação.** Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências, v. 23, p. 1-25 art. e26404, 2021. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1590/1983-21172021230116>. Acesso em: 28 fev. 2023.

SILVA, M. J. F. **Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC – SP, 1997.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 10a ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

TARDIF, M.; MOSCOSO, J. N. A noção de “profissional reflexivo” na educação: atualidade, usos e limites. Tradução Cláudia Schilling, **Cadernos de Pesquisa**, Rio de Janeiro, v. 48, n.168, p. 388 - 441, 2018.

TESTONI, L. A. **Caminhos Criativos e Elaboração de Conhecimentos Pedagógicos de Conteúdo na Formação Inicial do Professor de Física.** Tese de doutorado. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2013