Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado em Matemática Pura e Aplicada

CARACTERIZAÇÃO DE VARIEDADES NÃO MATRICIAIS EM ÁLGEBRAS ASSOCIATIVAS

Vinicius Capellari Martins

São José dos Campos

2022

Vinicius Capellari Martins

CARACTERIZAÇÃO DE VARIEDADES NÃO MATRICIAIS EM ÁLGEBRAS ASSOCIATIVAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Paulo – Instituto de Ciência e Tecnologia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador:
Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello

São José dos Campos

2022

Capellari Martins, Vinicius

B328e

Caracterização de variedades não matriciais em álgebras associativas / Vinicius Capellari Martins. – São José dos Campos, 2022-

51 p. ; 30 cm.

Orientador: Thiago Castilho de Mello

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, 2022.

Título em inglês: Characterization of non-matrix varieties of associative algebras.

1. PI-álgebras. 2. Variedades não matriciais. I. Mello, Thiago Castilho. II. Universidade Federal de São Paulo. III. Instituto de Ciência e Tecnologia. IV. Variedades não matriciais em álgebras associativas.

Universidade Federal de São Paulo
Instituto de Ciência e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Chefe do Departamento de Ciência e Tecnologia:

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada:

Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

Apoio Financeiro: CAPES – Demanda Social

Vinicius Capellari Martins

CARACTERIZAÇÃO DE VARIEDADES NÃO MATRICIAIS EM ÁLGEBRAS ASSOCIATIVAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Paulo – Instituto de Ciência e Tecnologia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello
Presidente da Comissão Julgadora

Prof. Dr. Lucio Centrone
Membro Titular da Comissão Julgadora

Prof. Dr. Victor Petrogradskiy
Membro Titular da Comissão Julgadora

Profa. Dra. Ana Cristina Vieira
Membro Titular da Comissão Julgadora

RESUMO

Uma variedade de álgebras associativas é dita uma variedade não matricial, se ela não contém a álgebra das matrizes 2×2 sobre o corpo base, K, já que isso implica que ela não contém nenhuma álgebra de matrizes. Nessa dissertação apresentaremos algumas caracterizações para variedades não matriciais, variedades não matriciais que não contém G (álgebra de Grassmann) e variedades não matriciais que não contém $G \otimes G$.

ABSTRACT

A variety of associative algebras is called a nonmatrix variety, if it does not contain the algebra of 2×2 matrices over base field K, that implies it does not contain any matrix algebra. We study some caracterizations of nonmatrix varieties, nonmatrix varieties that do not contain G (the Grassmann algebra) and nonmatrix varieties of algebras that do not contain $G \otimes G$.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Identidades polinomiais estão presentes, inclusive, em estruturas algébricas estudadas em matemática elementar. O corpo $\mathbb{R}$, por exemplo, é comutativo, ou seja, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a,b) = ab - ba = 0$. Sendo assim, podemos dizer que o polinômio $f(x,y) = xy - yx$ é uma identidade polinomial de $\mathbb{R}$. Generalizando podemos dizer que $f(x,y)$ é uma identidade polinomial para qualquer álgebra comutativa. A partir daí, é possível expandir essa ideia para qualquer anel de polinômios em variáveis não comutativas e de maneira mais geral o que chamamos de álgebras livres.

Dizemos que uma álgebra é uma PI-álgebra (do inglês, polynomial identity algebra) quando esta satisfaz uma identidade polinomial não nula. Apesar de alguns trabalhos mais antigos já tratarem de tópicos que, hoje em dia, seriam considerados dentro da teoria de PI-álgebras, foi nas décadas de 40 e 50 que a teoria iniciou seu desenvolvimento próprio, com trabalhos de Jacobson e Kaplansky sobre a estrutura de álgebras satisfazendo identidades polinomiais e também com a publicação do famoso teorema de Amitsur-Levitzki, sobre identidades de álgebras de matrizes. Além disso, o problema de Specht (que questionava se toda PI-álgebra tem conjunto finito de geradores para seu ideal de identidades) foi um dos grandes motivadores para o desenvolvimento da PI-teoria. Este problema foi resolvido apenas na década 80 por Kemer. Apesar de uma teoria bem desenvolvida, há ainda problemas que podem se considerados básicos, como por exemplo, exibir uma base finita das identidades da álgebra de matrizes 3×3. Dada uma álgebra A, o conjunto de identidades satisfeitas por A é um ideal da álgebra $F\langle X \rangle$ dos polinômios não comutativos nas variáveis de um conjunto enumerável X. Denotamos este conjunto por $T(A)$. Por outro lado, a partir de um conjunto de polinômios de $K\langle X \rangle$, podemos considerar a classe de todas as álgebras que satisfazem estes como identidades. Esta é chamada de variedade de álgebras definida por tal conjunto de polinômios.

O estudo de variedades é equivalente ao estudo dos chamados T-ideais (que são o conjunto de identidades de alguma álgebra). Quando o corpo tem característica zero, as identidades de uma dada álgebra (ou de uma dada variedade) são determinadas por polinômios multilineares. Dessa forma, se P_n denota o conjunto de polinômios multilineares não comutativos, então $P_n \cap T(A)$ determina todas as identidades de A. De modo a estudar quantitativamente este conjunto de modo mais controlado, foi introduzida a chamada sequência de codimensões de A, como sendo a sequência $c_n(A) = \dim \dfrac{P_n}{P_n \cap T(A)}$. Para PI-álgebras, foi provado por Regev em 1972 que tal sequência é limitada exponencialmente e foi conjecturado por Amitsur no início da década de 80 que o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

existe e é um número inteiro.

Esta conjectura foi provada há cerca de duas décadas por Giambruno e Zaicev e isso representou uma revolução no estudo da teoria de PI-álgebras. O tal número inteiro foi chamado de expoente da álgebra (ou da variedade de álgebras).

Após a prova da integralidade do expoente, vários trabalhos se seguiram tratando deste assunto. Dentre estes, buscou-se a classificação de variedades de expoente pequeno. Um resultado de Kemer que já era conhecido, quando traduzido para esta nova linguagem afirma que uma dada variedade de álgebras $\mathcal{V}$ tem expoente 1 se, e somente se, esta não contém a álgebra de Grassmann nem a álgebra de matrizes triangulares superiores 2×2. Giambruno e Zaicev apresentaram em 2000 ainda uma classificação das variedades de expoente 2. Eles apresentaram uma lista de 5 álgebras de modo que uma variedade $\mathcal{V}$ tem expoente ≤ 2 se e somente se $\mathcal{V}$ não contém nenhuma destas 5 álgebras.

Dizemos que os resultados apresentados acima estão na linguagem de objetos proibidos. Dessa forma, faz-se interessante conseguir caracterizar variedades a partir da propriedade de esta não conter uma determinada álgebra.

É neste espírito que foram estudados os principais resultados que apresentaremos nesta dissertação.

Nessa dissertação estudaremos algumas propriedades de variedades que foram introduzidas por Latyshev em 1977, mais especificamente de variedades não matriciais, ou seja, aquelas variedades que não contém as álgebras de matrizes, mostraremos que é suficiente não conter $M_2(K)$.

Estudaremos, principalmente o artigo, [9], onde caracterizou-se as variedades não matriciais, em relação a algumas identidades polinomiais satisfeitas pelas álgebras de tal variedade e também em relação à estrutura de tais álgebras. Posteriormente, veremos caracterizações das variedades que também não contém as álgebras G (álgebra de Grassmann) e $G \otimes G$.

Para atingirmos tais resultados, iniciaremos estudando algumas propriedades estruturais de álgebras associativas, onde utilizaremos como principais referências os livros [2] e [6]. Após isso, precisaremos de alguns pré-requisitos da teoria clássica de PI-álgebras que podem ser encontrados nos principais livros de PI-álgebras, como [4], [5] e [1] .

Já no capítulo 4 estudaremos alguns resultados do artigo [7], necessários para concluirmos os estudos do artigo [9].

Capítulo 2

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Nesse capítulo, introduziremos alguns resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Alguns conceitos usualmente abordados em cursos introdutórios de álgebra e em disciplinas de graduação em matemática serão considerados pré-requisitos, porém serão devidamente aprofundados se houver necessidade. Revisitaremos, por exemplo, a definição de espaços vetoriais, porém sobre domínios de integridade ao invés de corpos. As principais referências utilizadas foram [2] e [6].

2.1 Módulos e Espaços Vetoriais

Para algumas propriedades de anéis que iremos utilizar, necessitaremos definir módulos e estudá-los superficialmente.

Definição 2.1. Seja um anel R. Um *R-módulo à esquerda* é um grupo abeliano M munido de uma ação de $R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto rm$ com as seguintes propriedades, para todo $m \in M$ e $r, s \in R$:

(a) $(r + s)m = rm + sm$.

(b) $r(m + n) = rm + rn$.

(c) $r(sm) = (rs)m$.

Adicionalmente, se R é unitário,

(d) $1m = m$.

Nesse caso M é dito um *R-módulo unitário à esquerda*.

Analogamente, definimos um *R-módulo à direita* com uma ação de $M \times R$. Note que se R é comutativo, podemos obter um R-módulo à direita a partir de um R-módulo à direita definindo $mr := rm$, para todo $r \in R$ e $m \in M$. Quando não especificarmos, estaremos tratando de um R-módulo à esquerda.

Exemplo 2.2. Seja V um K-espaço vetorial, temos que V é um K-módulo unitário à esquerda.

Exemplo 2.3. Seja V um K-espaço vetorial e $\mathrm{End}_K(V)$ o anel do conjunto de operadores lineares de V, V é um $\mathrm{End}_K(V)$-módulo à esquerda, onde $Tv = T(v)$ com $T \in \mathrm{End}_K(V)$ e $v \in V$. Note que se $\dim(V) = n$ temos que $\mathrm{End}_K(V)$ é isomorfo como anel à $M_n(K)$ e com isso V é um $M_n(K)$-módulo à esquerda.

Definição 2.4. Seja M um R-módulo e N um submódulo de M. Considerando apenas a estrutura de grupo aditivo abeliano de M podemos construir o grupo quociente $M/N = \{m + N | m \in M\}$ com a relação definida por:

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N.$$

Pode-se definir uma multiplicação por escalares de R, associando ao par $(r, m + N) \in R \times M/N$ o elemento $am + N \in M/N$. Chamaremos esse R-módulo M/N de módulo quociente do módulo M pelo submódulo N.

Definição 2.5. Sejam M e N dois R-módulos. Uma função $f : M \to N$ diz-se um homomorfismo de R-módulos ou um R-homomorfismo se para todo $m_1, m_2 \in M$ e todo $r \in R$ se verifica:

i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.

ii) $f(rm_1) = rf(m_1)$.

Ao contrário de espaços vetoriais é possível que em um R-módulo M exista $r \in R$ com $r \neq 0$ tal que para algum $m \neq 0$, $rm = 0$.

Definição 2.6. O *anulador* de um R-módulo M é o conjunto

$$\mathrm{ann}_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ para todo } m \in M\}.$$

Se $ann_R M = \{0\}$ dizemos que M é um *módulo fiel.*

Note que $\mathrm{ann}_R(M)$ é um ideal bilateral de R.

Exemplo 2.7. Considere $\mathbb{Z}_n$ como um $\mathbb{Z}$-módulo. Então $\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n) = n\mathbb{Z}$.

Exemplo 2.8. O R-módulo do exemplo 2.2 é fiel com $V \neq \{0\}$.

Definiremos algumas propriedades básicas de módulo semelhantes em diversas estruturas algébricas.

Definição 2.9. Um subconjunto de S de um R-módulo M é dito *submódulo* de M se é um subgrupo de M e $rS \subset S$, para todo $r \in R$.

O próximo exemplo mostra como gerar submódulos a partir de ideais do anel R.

Exemplo 2.10. Sejam J um ideal à esquerda de R e M um R-módulo. O subgrupo de M gerado pelos elementos jm com $j \in J$ e $m \in M$ formam um submódulo de M. Denotaremos esse submódulo como JM.

Exemplo 2.11. Seja M um R-módulo, $\{0\}$ e M são submódulos de M. Chamamos esses submódulos de *submódulos triviais*.

Submódulos diferentes de M e $\{0\}$ são chamados de submódulos próprios de M. O caso em que o R-módulo M não tem submódulos próprios é importante para diversas propriedades que estudaremos.

Definição 2.12. Seja R um anel. Dizemos que o R-módulo M é um *módulo simples* ou irredutível se M não tem submódulos não triviais.

No exemplo 2.10 observamos uma relação de submódulos com ideais de um anel, assim como o anulador de um módulo é formado de elementos do anel base, essas relações nos permitem definir o conceito de anel primitivo.

Definição 2.13. Dizemos que um anel R é um *anel primitivo* se existe um R-módulo simples e fiel.

Voltando ao paralelo entre espaços vetoriais e módulos podemos definir mais alguns conceitos similares aos vistos em um curso de álgebra linear.

Definição 2.14. Um subconjunto B de um R-módulo M é dito *linearmente independente* se para todos elementos distintos $b_1, \ldots, b_n \in B$ e $r_1, \cdots, r_n \in R$, $r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n = 0$ implica em $r_i = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Se B não é linearmente independente, dizemos que B é *linearmente dependente*.

Definição 2.15. Um subconjunto B linearmente independente de um R-módulo M é chamado de *base de M* se M é gerado por B.

Nem todo módulo tem base e existem módulos que têm bases com diferentes cardinalidades, no entanto se considerarmos R como um domínio de integridade obtemos uma estrutura bem próxima a um espaço vetorial sobre um corpo.

Definição 2.16. Seja D um anel de divisão. Um D-módulo unitário à esquerda é chamado de *D-espaço vetorial à esquerda*.

Como um corpo é um anel de divisão comutativo, todos os resultados clássicos de espaços vetoriais que não utilizam a comutatividade do corpo em suas demonstrações também são válidos para espaços vetoriais sobre anéis de divisão. Uma das diferenças das duas estruturas está no conjunto de operadores lineares de um espaço vetorial. No caso de V ser um espaço vetorial sobre um corpo K de dimensão n, sabemos que $End_K(V) \cong M_n(K)$, em espaços vetoriais sobre um anel de divisão D precisamos definir uma outra estrutura.

Definição 2.17. Seja $(R, +, *)$ um anel. O *anel oposto* de R, denotado por R^{op}, consiste em $(R, +, \times)$ em que

$$x \times y = y * x.$$

Essa definição nos permite enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.18. *Seja V um espaço vetorial à esquerda de dimensão n sobre um anel de divisão D. Então $End_D(V)$ e $M_n(D^{op})$ são isomorfos como anéis.*

Mais detalhes sobre espaços vetoriais sobre domínios de integridade e módulos podem ser encontrados no capítulo 3 de [2].

2.2 Radical de Jacobson e produto subdireto

Relacionaremos anéis primitivos com um anel qualquer, para isso precisaremos de dois conceitos principais: o radical de Jacobson e o produto subdireto.

Trabalharemos com anéis não necessariamente unitários, nesse caso o ideal gerado por um elemento $a \in R$, com R um anel, não é simplesmente $U = \{r_1 a r_2 \mid r_1, r_2 \in R\}$, já que podem existir casos que $a \notin U$, logo temos que o ideal à esquerda gerado por a , o ideal à direita gerado por a e o ideal gerado por a, denotados respectivamente por $\langle Ra \rangle$, $\langle aR \rangle$ e $\langle RaR \rangle$, são da seguinte forma

$$\langle Ra \rangle = Ra + \mathbb{Z}a,$$

$$\langle aR \rangle = aR + \mathbb{Z}a,$$

$$\langle RaR \rangle = RaR + aR + Ra + \mathbb{Z}a.$$

Apresentaremos alguns resultados estruturais relativos ao radical de Jacobson. Para defini-lo será necessário o conceito de ideais primitivos.

Definição 2.19. Um ideal P de um anel R é dito um *ideal primitivo* se P é anulador de um R-módulo simples.

Note que se $\{0\}$ é um ideal primitivo de R, então existe um R-módulo simples e fiel, consequentemente R é primitivo. Reciprocamente se R é primitivo, então $\{0\}$ é um ideal primitivo. Temos como generalizar essa ideia analisando o quociente de R por um ideal primitivo P.

Proposição 2.20. *Um ideal P de um anel R é um ideal primitivo se, e somente se, R/P é um anel primitivo.*

Demonstração. Seja P um ideal primitivo de R e M um R-módulo simples no qual $P = \text{ann}_R(M)$. Note que podemos definir um R/P-módulo com o grupo aditivo M com a seguinte operação

$$(r + P)m = rm,$$

para todo $r \in R$ e $m \in M$. Ora essa operação está bem definida pois, $P \subset \text{ann}_R(M)$ e por outro lado temos que M como R/P-módulo é fiel, já que $\text{ann}_R(M) \subset P$. Logo R/P é primitivo, já que M tem estrutura de R/P-módulo simples e fiel. Reciprocamente a partir de um R/P-módulo N simples e fiel definimos um R-módulo N com a seguinte operação

$$rn = (r + P)n, \tag{2.1}$$

para todo $r \in R$ e $n \in N$. Claramente o R-módulo N é simples e $\text{ann}_R(N) = P$, logo P é ideal primitivo. ∎

Outro conceito necessário para caracterizar o radical de Jacobson de um anel é o conceito de ideal maximal, veremos que eles estão relacionados com módulos simples e ideais primitivos.

Lema 2.21. *Seja R um anel. Todo R-módulo simples é isomorfo ao R-módulo R/U para algum ideal maximal à esquerda U de R. Reciprocamente, se U é um ideal maximal à esquerda de R tal que $R^2 \nsubseteq U$, então R/U é um R-módulo simples.*

Demonstração. Seja M um R-módulo simples. Tome $0 \neq m \in M$. Então $Rm = M$ e consequentemente $\phi : R \to M$, $\phi(r) = rm$ é um homomorfismo sobrejetivo de R-módulos. Seu núcleo U é um ideal à esquerda e $R/U \cong M$. Temos que mostrar que U é maximal. Seja L um ideal de R, tal que $U \subseteq L \subseteq R$. Então L/U é um submódulo de R/U. Como R/U é isomorfo à M que é simples, $L/U = 0$ ou $L/U = R/U$. Logo $L = U$ ou $L = R$ o que prova que U é maximal.

Reciprocamente, tome U um ideal maximal de R, e considere um R-submódulo N de R/U. Claramente, $L = \{l \in R \mid l + U \in N\}$ é um ideal à esquerda de R contendo U. Sendo assim $L = U$ ou $L = R$ e consequentemente, $N = 0$ ou $N = R/U$. Portanto R/U é simples, dado que $R^2 \nsubseteq U$. ∎

Lema 2.22. *Se P é um ideal primitivo de R, então existe um ideal maximal à esquerda U de R tal que $P = \{x \in R \mid xR \subset U\}$. Reciprocamente, se U é um ideal maximal à esquerda de R e $R^2 \not\subseteq U$, então $P := \{x \in R \mid xR \subseteq U\}$ é um ideal primitivo de R.*

Demonstração. Seja M um R-módulo simples tal que $P = \operatorname{ann}_R(M)$. Pelo Lema 2.21 existe um ideal maximal à esquerda U de R tal que $M = R/U$. Logo $P = \operatorname{ann}_R(R/U) = \{x \in R \mid xR \subseteq U\}$.

Seja agora U um ideal maximal à esquerda de R tal que $R^2 \not\subseteq U$. Pelo Lema 2.21 R/U é um R-módulo simples. Consequentemente, $\operatorname{ann}_R(R/U) = \{x \in R \mid xR \subseteq U\} = P$ é um ideal primitivo de R. ■

Com isso, podemos definir o radical de Jacobson de um anel R e o produto subdireto de anéis. Dessa maneira podemos comentar o principal resultado dessa seção.

Definição 2.23. O *radical de Jacobson* de um anel R, denotado por $\operatorname{Rad}(R)$, é a intersecção de todos os ideais primitivos de R. Se R não tem ideais primitivos, ou seja, R não tem módulos simples, então definimos $\operatorname{Rad}(R) = R$ e dizemos que R é um *anel radical*. Se $\operatorname{Rad}(R) = 0$ dizemos que R é um *anel semiprimitivo*.

Definição 2.24. Seja $\{R_i \mid i \in I\}$ uma família de anéis. Um subanel R do produto $\prod_{i \in I} R_i$ é chamado *produto subdireto* da família $\{R_i \mid i \in I\}$ se para cada $j \in I$, a função $\pi_j : R \to R_j$, $\pi_j((r_i)) = r_j$ é sobrejetiva.

Queremos mostrar que o anel quociente $R/\operatorname{Rad}(R)$ é isomorfo à um produto subdireto de anéis primitivos, para isso precisaremos de uma série de resultados envolvendo o conceito de quasi-inversibilidade.

Definição 2.25. Um elemento y de um anel R é dito *quasi-invertível à esquerda* se existe $x \in R$, que satisfaz

$$x + y = xy. \tag{2.2}$$

Chamamos x de *quasi-inverso à esquerda* de y. Analogamente, $x \in R$ é dito *quasi-invertível à direita* se existe $y \in R$, chamado *quasi-inverso à direita* de x, se satisfaz (2.2).

Note que se R é um anel unitário podemos reescrever a equação 2.2 como

$$(1 - x)(1 - y) = 1.$$

Portanto podemos dizer que x é quasi-inverso à esquerda de y se e somente se $(1 - x)$ é inverso à esquerda de $1 - x$. Particularmente, y é quasi-invertível à esquerda se e somente se $1 - y$ é invertível à esquerda. Dessa maneira, 1 não é quasi-invertível.

Podemos obter as mesmas relações para quasi-inversibilidade à direita. Suponhamos que em um anel R, um elemento $x \in R$ tenha um quasi-inverso y à esquerda e um quasi-inverso z à direita, mostraremos que nesse caso $y = z$, isso nos permitirá definir o conceito de quasi-inversibilidade.

Lema 2.26. *Se um elemento y tem um quasi-inverso à esquerda x e um quasi-inverso à direita z, então $x = z$.*

Demonstração. Pelas definições de quasi-inverso temos que,

$$x + y = xy \tag{2.3}$$

$$z + y = yz \tag{2.4}$$

Logo, multiplicando (2.3) por z à direita e (2.4) por x à esquerda, temos,

$$xz + yz = xz + xy \tag{2.5}$$

Aplicando (2.3) e (2.4) novamente, temos $x = z$. ∎

Definição 2.27. Um elemento $y \in R$ é chamado de *quasi-invertível* se existe $x \in R$ quasi-inverso à esquerda e à direita de y. Nesse caso, x é chamado de *quasi-inverso* de y.

Definição 2.28. Dizemos que $S \subset R$ é um *conjunto quasi-invertível* se todos elementos de S são quasi-invertíveis. Analogamente definimos um *conjunto quasi-invertível à esquerda* e um *conjunto quasi-invertível à direita*.

Lema 2.29. *Se um ideal à esquerda L é quasi-invertível à esquerda, então L é quasi-invertível.*

Demonstração. Seja $l \in L$. Pela hipótese existe $k \in R$ o elemento quasi-inverso à esquerda. Como $k = kl - l$, temos que $k \in L$. Sendo assim, k tem um quasi-inverso à esquerda m. Pelo Lema 2.26, $l = m$, ou seja, l é quasi-inverso de k. ∎

Analogamente um ideal à direita quasi-invertível à direita é quasi-invertível, logo podemos concluir que para ideais bilaterais ser quasi-invertível à direita ou à esquerda é equivalente a ser quasi-invertível. Nos próximos analisaremos o radical de Jacobson em relação à quasi-invertibilidade.

Lema 2.30. *Seja R um anel arbitrário. Se $a \in R$ não tem um quasi-inverso à esquerda, então existe um ideal maximal à esquerda U de R tal que $a \notin U$. Além disso, R/U é um R-módulo simples e $a \notin ann_R(R/U)$.*

Demonstração. Tomando $L = \{ra - r \mid r \in R\}$, ideal à esquerda de R, temos que $a \notin L$, já que a não tem um quasi-inverso à esquerda. Mais do que isso, se L' é um ideal à esquerda próprio de R tal que, $L \subset L'$, então $a \notin L'$. De fato, escrevendo $r \in R$ como $r = -(ra - r) + ra$, temos que se $a \in L'$, $r \in L'$ para todo $r \in R$, ou seja, $L' = R$. Seja $\mathcal{L}$ o conjunto de todos os ideais próprios de R que contêm L. Ordenaremos parcialmente $\mathcal{L}$ pela inclusão. Se $\{K_i \mid i \in I\}$ é uma cadeia em $\mathcal{L}$, então $K = \bigcup_{i \in I} K_i$ é um limitante superior. De fato $a \notin K$, ou seja, K é próprio. Logo, pelo Lema de Zorn $\mathcal{L}$ tem um elemento maximal U. Logo temos que, U é um ideal maximal à esquerda com $a \notin U$. Além disso, como $a^2 - a \in U$, $a^2 \notin U$. Pelo Lema 2.21 temos que R/U é um R-módulo simples. Finalmente, como $a(a + U) \neq 0$, $a \notin \operatorname{ann}_R(R/U)$. ■

Teorema 2.31. *Seja R um anel e seja $q \in R$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) O ideal gerado por q é quasi-invertível.

(ii) O ideal à esquerda Rq é quasi-invertível.

(iii) $q \in Rad(R)$.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Segue da definição de ideal.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Suponha $q \notin \operatorname{Rad}(R)$. Então existe um R-módulo simples M tal que $qm \neq 0$ para algum $m \in M$, pelo Lema 2.21. Temos também que, $Rqm = M$ pela irredutibilidade de M. Sendo assim, $lm = m$ para algum $l \in Rq$. Como l é quasi-invertível, existe $r \in R$ tal que $r + l = rl$. Consequentemente, $m = lm = rlm - rm = 0$, o que contradiz $qm \neq 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Pelo Lema 2.30 temos que se q não é quasi-invertível à esquerda, então existe um R-módulo simples M tal que $q \notin \operatorname{Ann}_r(M)$, ou seja, $q \notin \operatorname{Rad}(R)$, sendo assim, todo elemento do radical de Jacobson de R é quasi-invertível à esquerda e consequentemente pelo Lema 2.29 é quasi-invertível. ■

Se trocarmos no item (ii) o ideal à esquerda Rq pelo ideal à direita qR, com algumas pequenas modificações na demonstração temos que o resultado se mantém para qR e que q anula todos os R-módulos simples à direita e com isso obtemos que o radical de Jacobson à esquerda coincide com o radical de Jacobson à direita. Além disso o seguinte corolário segue direto.

Corolário 2.32. *O radical de Jacobson de um anel R é um ideal quasi-invertível que contém todo ideal unilateral quasi-invertível de R.*

Com o Corolário 2.32 podemos mostrar uma propriedade central para radicais de Jacobson em anéis unitários.

Corolário 2.33. *O radical de Jacobson de um anel unitário R é igual a intersecção de todos os ideais maximais à esquerda de R .*

Demonstração. Seja T a intersecção de todos os ideais maximais de R à esquerda. Claramente T é um ideal à esquerda. Pelo Lema 2.30, temos que T é quasi-invertível à esquerda, pois para cada $a \in T$ não quasi-invertível à esquerda, existe um ideal maximal U tal que $a \notin U$ e consequentemente $a \notin T$. Sendo assim, T é quasi-invertível à esquerda e aplicando o Lema 2.29, T é quasi-invertível. Assim, $T \subset R$, pelo Corolário 2.32. O fato de $\mathrm{Rad}(R) \subset T$ segue do Lema 2.22. ∎

Com essas propriedades de quasi-invertibilidade e radical de Jacobson podemos enunciar a próxima proposição para então mostrar que $R/\mathrm{Rad(R)}$ é semiprimitivo.

Proposição 2.34. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) O anel R é radical.

(ii) Todo elemento de R é quasi-invertível.

(iii) O anel R não tem módulo simples.

Demonstração. Pelo Corolário 2.32 as afirmações (i) e (ii) são equivalentes. Se R é um anel radical, então R não pode ter módulos simples, já que seus anuladores são sempre subconjuntos próprios de R. Sendo assim (i) implica (iii), a recíproca segue da definição de radical de Jacobson. ∎

Lema 2.35. *O anel $R/Rad(R)$ é semiprimitivo para todo anel R.*

Demonstração. O caso em que R é radical é trivial. Pela Proposição 2.34, nós podemos assumir que R tem módulos irredutíveis. Tome um R-módulo simples M. O grupo aditivo M se torna um módulo simples de $R/\mathrm{Rad}(R)$ definindo

$$(x + \mathrm{Rad}(R))m = xm \text{ para todo } x \in R, m \in M. \tag{2.6}$$

Se $q \in R/\mathrm{Rad}(R))$, temos que $q + \mathrm{Rad}(R) \in \mathrm{ann}_{R/\mathrm{Rad}(R)}(M)$, logo temos $qM = (q + \mathrm{Rad}(R))M = 0$. Como M é um módulo simples arbitrário, $q \in \mathrm{Rad}(R)$. ∎

Lema 2.36. *Um anel R não nulo é semiprimitivo se, e somente se, R é isomorfo a um produto subdireto de anéis primitivos.*

Demonstração. Seja R um anel semiprimitivo. Denotaremos a família de todos os ideais primitivos de R por $\{P_i \mid i \in I\}$. Pelo Lema 2.20, temos que os anéis R/P_i são primitivos para todo $i \in I$. Pela hipótese, $\bigcap_{i \in I} P_i = 0$. Com isso temos que o homomorfismo

$$R \to \prod_{i \in I} R/P_i, \ r \mapsto (r + P_i) \tag{2.7}$$

é injetivo. Sua imagem, pela construção, é um produto subdireto da família $\{R/P_i \mid i \in I\}$. Reciprocamente, tome uma família de anéis primitivos $\{R_i \mid i \in I\}$ e seja $\phi : R \to \prod_{i\in I} R_i$ um homomorfismo injetivo tal que $\pi_j(\phi(R)) = R_j$ para todo $j \in I$. Tome $P_j = \ker(\pi_j\phi)$. Temos que $R/P_j \equiv R_j$ e novamente pelo Lema 2.20 , P_j é um ideal primiitivo de R para todo $j \in I$. Se $r \in \bigcap_{i\in I} P_i$, então $\phi(r) = 0$ e consequentemente $r = 0$. Sendo assim, $\mathrm{Rad}(R) \subset \bigcap_{i\in I} P_i = 0$. ■

Pelos Lemas 2.35 e 2.36 concluímos que para qualquer anel R, $R/\mathrm{Rad}(R)$ é isomorfo a um produto subdireto de anéis primitivos, o que conclui essa seção.

2.3 Álgebras e Teorema de Wedderburn

Nessa seção apresentaremos as noções básicas sobre álgebras e obteremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer da dissertação.

Definição 2.37. Um espaço vetorial A sobre um corpo K é dito uma *álgebra sobre* K, ou uma K*-álgebra* se A é munido com uma operação binária $* : A \times A \to A$, chamada *multiplicação*, tal que para todo $r, s, t \in A$ e qualquer $\alpha \in K$

(a) $(r + s) * t = r * t + s * t$.

(b) $r * (s + t) = r * s + r * t$.

(c) $\alpha(r * s) = (\alpha r) * s = r * (\alpha s)$.

Exemplo 2.38. Seja K um corpo, o anel de polinômios comutativos $K[x]$ é uma K-álgebra.

Exemplo 2.39. Para todo conjunto X o anel $K\langle X\rangle$ que tem como base o conjunto de todas as palavras

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n},\ x_{i_j} \in X,\ n = 0, 1, 2, \cdots ,$$

e a multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_n},\ x_{i_k}, x_{j_l} \in X,$$

é uma K-álgebra.

Exemplo 2.40. Seja K um corpo, $M_n(K)$ munido da multiplicação usual de matrizes é uma K-álgebra.

Definição 2.41. O subespaço S de uma álgebra A é chamado *subálgebra* se é fechado em relação à multiplicação de A. A subálgebra I de A é chamada de ideal à esquerda de A se $AI \subset I$. Analogamente definimos ideal à direita e ideal bilateral.

Exemplo 2.42. Seja $U_n(K)$ o conjunto de todas as matrizes triangulares superiores de $M_n(K)$, $U_n(K)$ é uma subálgebra de $M_n(K)$.

Definição 2.43. Seja A uma K-álgebra.

(i) A é unitária se existe um elemento neutro em A para a operação $*$.

(ii) A é *associativa* se $(r * s) * t = r * (s * t)$, para todo $r, s, t \in A$.

(iii) A é *comutativa* se $r * s = s * r$, para todo $r, s \in A$.

(iv) A é uma *álgebra de Lie* se para todo $r, s, t \in A$,

$$r * r = 0, \text{ lei da anticomutatividade,}$$
$$(r * s) * t + (s * t) * r + (t * r) * s = 0, \text{ identidade de Jacobi.}$$

Exemplo 2.44. Seja V um K-espaço vetorial com uma base ordenada $\{e_i \mid i \in I\}$ e $E(V)$ a álgebra associativa gerada por $\{e_i \mid i \in I\}$ com as seguintes relações

$$e_i e_j + e_j e_i = 0,\ i, j \in I,$$

(e $e_i^2 = 0$ se $\mathrm{char}(K) = 2$). Dizemos que $E(V)$ é a *álgebra de Grassmann* de V. Se $\dim(V)$ for enumerável denotaremos $E(V)$ por G.

Exemplo 2.45. Seja K um corpo e $sl_n(K)$ o conjunto das matrizes de traço zero de $M_n(K)$, com a multiplicação $[.,.] : sl_n(K) \times sl_n(K) \to sl_n(K)$,

$$[a, b] = a * b - b * a, \text{ para todo } a, b \in sl_n(K)$$

onde, $*$ é a multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra de Lie. Além disso dizemos que $[a, b]$ é o *comutador* de a, b.

Definição 2.46. Seja A uma K-álgebra dizemos que A é uma álgebra simples se A não tem ideais próprios, ou seja, se os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A.

Partindo de uma álgebra associativa A sempre podemos construir uma álgebra de Lie definindo o novo produto com o comutador. Denotaremos essa álgebra por $A^{(-)}$.

Definição 2.47. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e dois subconjuntos $A, B \subset \mathfrak{g}$, denotamos por $[A, B]$ o subespaço gerado por

$$\{[x, y] \mid x \in A, y \in B\}.$$

Define-se por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}].$$

Chamamos de *série derivada de* $\mathfrak{g}$ a cadeia $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{g}^{(2)} \supseteq \cdots$.

Definição 2.48. Seja $\mathfrak{g}$ uma K álgebra de Lie, dizemos que $\mathfrak{g}$ é *solúvel* se sua série derivada estabiliza na subálgebra $\{0\}$.

Exemplo 2.49. A álgebra $sl_2(K)$ não é solúvel se $\mathrm{char}(K) \neq 2$, já que $sl_2(K)^{(k)} = sl_2(K)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 2.50. Sejam V e W dois espaços vetoriais com bases $\{v_i \mid i \in I\}$ e $\{w_j \mid j \in J\}$, respectivamente. O *produto tensorial* de $V \otimes W = V \otimes_K W$ de V e W é o espaço vetorial com base $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$. Asumimos que,

$$\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j \in J} \beta_j w_j\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_i \beta_j (v_j \otimes w_j), \alpha_i, \beta_j \in K.$$

Exemplo 2.51. As álgebras $G^{(-)}$ e $(G \otimes G)^{(-)}$ são solúveis.

Definição 2.52. Um elemento a de uma K-álgebra comutativa A é álgebrico se existe um polinômio não nulo $f(x) \in K[x]$ tal que $f(a) = 0$. Dizemos que A é uma álgebra algébrica se todo elemento de A é álgebrico

2.3.1 Teorema de Wedderburn

O teorema de Wedderburn caracteriza certa classe de álgebras de dimensão finita em relação às álgebras de matrizes.

Definição 2.53. Seja R um anel unitário e seja $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto $\{E_{ij} \in R \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é chamado um *conjunto de matrizes elementares* $n \times n$ se

$$E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn} = 1 \tag{2.8}$$

e

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il} \tag{2.9}$$

para todos $1 \leq i, j, k, l \leq n$. Onde, δ_{jk} é o delta de Kronecker.

Lema 2.54. *Se um anel unitário R contém um conjunto de elementos de $n \times n$ matrizes elementares E_{ij}, então $R \cong M_n(S)$ onde $S = E_{11} R E_{11}$.*

Demonstração. Defina $\phi : R \to M_n(E_{11}RE_{11})$ onde

$$\phi(a) = (a_{ij}), \text{ onde } a_{ij} = E_{1i}aE_{j1}. \tag{2.10}$$

Note que $a_{ij} = E_{11}a_{ij}E_{11}$ e desse modo, $a_{ij} \in E_{11}RE_{11}$. A aditividade segue direto da definição. Vamos calcular a entrada (i,j) de $\phi(a)\phi(b)$,

$$\sum_{k=1}^{n} E_{1i}aE_{k1}E_{1k}bE_{j1} = E_{1i}a\left(\sum_{k=1}^{n} E_{kk}\right)bE_{j1} = E_{1i}abE_{j1}. \tag{2.11}$$

Com isso temos que $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$ e ϕ é homomorfismo de anéis. Se $a_{ij} = 0$ para todo i,j então, $E_{ii}aE_{jj} = E_{i1}a_{ij}E_{1j} = 0$ e somando para todo i,j temos, $a = 0$, logo ϕ é injetiva. Para a sobrejetividade, basta observar que $\phi(E_{k1}aE_{1l})$ é a matriz com a entrada (k,l) sendo $E_{11}aE_{11}$ e as outras entradas sendo iguais a 0. ■

Lema 2.55. *Seja D um anel com divisão, $M_n(D)$ é simples.*

Demonstração. Seja I um ideal não nulo de $M_n(D)$ e tome $A = (a_{ij}) \in I$ não nula. Temos que para a matriz elementar $E_{l,k}$,

$$E_{l,i}AE_{j,k} = a_{i,j}E_{l,k} \tag{2.12}$$

Logo, sendo I um ideal próprio de $M_n(R)$, tomamos A com $a_{i,j} \neq 0$, por (2.12), para $l,k \in \{1,2,...,n\}$ e $d \in D$, temos que:

$$(da_{i,j}^{-1})E_{l,i}AE_{j,k} = dE_{l,k} \tag{2.13}$$

Sendo assim $dE_{l,k} \in I$ para todo $d \in D$ e $l,k \in \{1,...,n\}$, logo $I = M_n(D)$ e $M_n(D)$ é simples. ■

Mostraremos quais são as condições para uma álgebra de dimensão finita ser isomorfa à uma álgebra de matrizes, para isso precisaremos definir primalidade e algumas de suas propriedades.

Lema 2.56. *Seja R um anel. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para todo $a,b \in R$, $aRb = 0$ implica $a = 0$ ou $b = 0$.

(ii) Para quaisquer ideais à esquerda $I,J \subseteq R$, $IJ = 0$ implica em $I = 0$ ou $J = 0$.

(iii) Para quaisquer ideais à direita $I,J \subseteq R$, $IJ = 0$ implica em $I = 0$ ou $J = 0$.

(iv) Para quaisquer ideais $I,J \subseteq R$, $IJ = 0$ implica em $I = 0$ ou $J = 0$.

Demonstração. Se I e J são ideais a esquerda $IRJ = IJ$, pois $RJ \subset J$ e $IRJ = 0$. Se supormos que existem $i \in I$ e $j \in J$ não nulos, temos que $iRj = 0$, com $i, j \neq 0$ o que contraria a hipótese e logo (i) implica (ii) e, analogamente, (i) implica (iii). Além disso todo ideal é um ideal à direita e à esquerda, consequentemente, (ii) implica (iv) e (iii) implica (iv).

Basta verificar que (iv) implica (i). Supondo que para todos ideais $I, J \subseteq R$, $IJ = 0$ implica em $I = 0$ ou $J = 0$ e tomando $a, b \in R$, tais que $aRb = 0$. Considerando os ideais RaR e RbR, temos que $RaRRbR = 0$. Podemos tomar sem perda de generalidade $RaR = 0$ e consequentemente temos aR e Ra são ideias bilaterais, com $R(aR) = (Ra)R = 0$. Por (iv) temos $Ra = aR = 0$. Com isso $\mathbb{Z}a = 0$ é um ideal de R, tal que $(\mathbb{Z}a)R = 0$, novamente por (iv) $a = 0$. Logo (iv) implica (i) e a demonstração está completa. ∎

Definição 2.57. Se R é um anel que satisfaz uma das propriedades do Lema 2.56 e portanto todas as propriedades, dizemos que R é um *anel primo*.

Lema 2.58. *Seja R um anel. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para todo $a \in R$, $aRa = 0$ implica em $a = 0$.

(ii) Para todo ideal à esquerda $I \subseteq R$, $I^2 = 0$ implica em $I = 0$.

(iii) Para todo ideal à direita $I \subseteq R$, $I^2 = 0$ implica em $I = 0$.

(iv) Para todo ideal $I \subseteq R$, $I^2 = 0$ implica em $I = 0$.

(v) O anel R não possui ideais nilpotentes.

Demonstração. As demonstrações das implicações (i)-(iv) são semelhantes às do Lema 2.56. De (v) para (iv) temos uma implicação direta. Suponha que I é um ideal nilpotente de R tal que $I^n = 0$ e que a afirmação (iv) é verdadeira para R, logo $(I^{n-1})^2 = 0$ e consequentemente, $I^{n-1} = 0$, por (iv) e aplicando a indução, temos que $I = 0$, logo (iv) implica (v) por contradição. ∎

Definição 2.59. Seja R um anel que satisfaz uma das afirmações do Lema 2.58, e portanto todas as afirmações, dizemos que R é um *anel semiprimo*.

Da mesma maneira definimos *álgebras primas*, pois se I e J são ideais de um anel R, com $IJ = 0$, os subespaços gerados por I e J numa K-álgebra de R são ideais da álgebra R, com produto 0. A ideia é similar para *álgebras semiprimas*, além disso segue direto da definição que toda álgebra prima é semiprima. Para estudarmos algumas propriedades dessas álgebras necessitaremos do conceito de ideal minimal.

Definição 2.60. Um ideal à esquerda L de um anel R é chamado de *ideal minimal à esquerda* se $L \neq 0$ e L não contém um ideal à esquerda próprio de R, ou seja, se I é um ideal à esquerda de R que satisfaz $0 \subseteq I \subseteq L$ então, $I = 0$ ou $I = L$.

Proposição 2.61. *Seja A uma K-álgebra de dimensão finita n, sempre existe um ideal à esquerda $L \neq 0$, tal que L é minimal.*

Demonstração. Tome I um ideal à esquerda não nulo de A com $\dim(I) = i \leq n$, se não existe um ideal J à esquerda tal que $J \subset I$, I é minimal e o resultado segue. Suponha então que $J \subset I$, logo $\dim(J) < i$. Por indução temos que uma cadeia descendente de ideais não nulos à esquerda tem no máximo n elementos e consequentemente tem elemento mínimo. Logo existe um ideal minimal à esquerda. ■

Lema 2.62. *Se L é um ideal minimal à esquerda de um anel semiprimo R, então existe um elemento idempotente $e \in R$, tal que $L = Re$ e eRe é um anel de divisão.*

Demonstração. Como R é semiprimo, pela afirmação (iv) do Lema 2.58 existem $x, y \in L$, tais que $xy \neq 0$. Em particular, $Ly \neq 0$. Porém Ly é um ideal à esquerda de R, tal que $Ly \subset L$, logo $Ly = L$, pois L é minimal. Sendo assim, existe $e \in L$ com $ey = y$. Tome $J = \{z \in L \mid zy = 0\}$, note que $e^2 - e \in J$ e além disso J é um ideal à esquerda de R, tal que $J \subset L$, logo $J = 0$, já que $e \notin J$. Temos então que $e^2 = e$. Claramente $Re \subset L$, pois $e \in L$ e $e \in Re$, pois $e \in R$, e temos $Re = L$, novamente pela minimalidade de L. Vamos mostrar, agora, que eRe é um anel de divisão. Observe inicialmente que e é a unidade de eRe. Tome $a \in R$, tal que $eae \neq 0$, temos que provar que eae é invertível em eRe. Temos que $0 \neq Reae \subseteq Re = L$, e pelos mesmos argumentos anteriores, $Reae = L$. Sendo assim, $beae = e$, para algum $b \in R$ e consequentemente, $(ebe)(eae) = e$. Como $ebe \neq 0$, pelo mesmo argumento existe c, tal que $(ece)(ebe) = e$. Porém, o inverso à esquerda coincide com o inverso à direita, logo $ece = eae$ e eae tem ebe como inverso, com isso eRe é um anel de divisão com e sendo sua unidade. ■

O resultado do teorema vale também para álgebras não unitárias, para esse caso utilizaremos o processo de unitarização de álgebras e algumas de suas propriedades.

Definição 2.63. Seja A uma K-álgebra, chamamos de **unitarização** de A a álgebra $A^{\#} = F \times A$ com as seguintes operações:

$$(\lambda, x) + (\mu, y) = (\lambda + \mu, x + y). \tag{2.14}$$

$$\mu(\lambda, x) = (\mu\lambda, \mu x). \tag{2.15}$$

$$(\lambda, x)(\mu, y) = (\lambda\mu, \mu x + \lambda y + xy). \tag{2.16}$$

Onde $\lambda, \mu \in F$ e $x, y \in A$. Note que A é unitária com $(1, 0)$ sendo sua unidade. Além disso A pode ser considerada um ideal de $A^{\#}$ pelo monomorfismo $x \mapsto (0, x)$.

Lema 2.64. *Se A é uma álgebra prima sem unidade, $A^{\#}$ também é prima.*

Demonstração. Seja $(\lambda, a), (\mu, b) \in A^{\#}$ satisfazendo $(\lambda, a)A^{\#}(\mu, b) = 0$. Note que, dessa maneira, $(\lambda, a)(1, 0)(\mu, b) = 0$, e consequentemente $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$. Sem perda de generalidade, vamos considerar o caso em que $\lambda = 0$ e $a \neq 0$. Para qualquer $x \in A$ temos $(0, a)(0, x)(\mu, b) = 0$ e, $\mu ax + axb = 0$. Note que $\mu \neq 0$, de outra maneira $aAb = 0$ e como A é primo teríamos $b = 0$. Tomando $e = \mu^{-1}b$, podemos reescrever como $ax = -axe$. Sendo assim, $a(xy)e = -a(xy) = (axe)y$ para todo $x, y \in A$ e, consequentemente

$$ax(y - ye) = 0 = ax(y - ey) \tag{2.17}$$

Como A é primo, temos que $y = ye$ e $ey = y$ para todo $y \in A$. Porém A não é unitária e temos uma contradição. ■

Com isso, podemos enunciar e demonstrar o teorema de Wedderburn.

Teorema 2.65. *Seja A uma K-álgebra de dimensão finita. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A é simples.*

(ii) *A é prima.*

(iii) *Existe $n \in \mathbb{N}$ e uma álgebra de divisão D, tal que $A \cong M_n(D)$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.55, (iii) implica em (i) e, de maneira direta, (i) implica em (ii).

Basta provar que (ii) implica (iii). Primeiramente vamos supor que A é unitária e usaremos indução sobre $d := \dim_K (A)$.

Para $d = 1$, tomamos $n = 1$ e $D = K$. Agora, seja $d > 1$, como A tem dimensão finita, pelo Lema 2.61, A tem um ideal minimal à esquerda e consequentemente pelo Lema 2.62, existe um elemento idempotente $e \in A$, tal que eAe é uma álgebra de divisão. Se $e = 1$, A é um anel de divisão. Logo, assumiremos que e é um idempotente não-trivial.

Seja $f := 1 - e$, temos que $fAf \neq 0$ é uma álgebra com unidade f. Note que fAf é prima, já que se existissem dois ideais à esquerda $I, J \neq 0$ de fAf tal que $IJ = 0$, os ideais gerados por I e J em A, seriam não nulos e seu produto $AIfAfJ = 0$. Consequentemente $e \notin fAf$, pois caso contrário teríamos $e = fxf$, para algum $x \in A$. Assim, $0 = fe = ffxf = fxf = e$. Logo $\dim_K (fAf) < d$. Pela hipótese de indução, fAf é isomorfa a alguma álgebra de matrizes $n \times n$ sobre uma álgebra de divisão. Sendo assim, fAf contém as matrizes elementares E_{ij}, $i, j = 1, 2, \cdots, m$, tais que $E_{11}fAfE_{11}$ é uma álgebra de divisão. Vamos estender as matrizes elementares de fAf para as matrizes elementares de A.

Tome $n = m+1$ e $E_{nn} = e$. Dessa maneira temos $\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = f + e = 1$, e claramente $E_{ij}e = eE_{ji} = 0$, para todo $i, j < n$, pois $efAf = fAfe = 0$. Basta encontrarmos agora quem são os E_{in} e E_{ni}, com $i < n$.

Começaremos encontrando E_{1n} e E_{n1}. Note que pela primalidade de A, existe $a \in A$, tal que $E_{11}aE_{nn} \neq 0$ e consequentemente, utilizando novamente a primalidade, $a' \in A$ com $E_{11}aE_{nn}a'E_{11} \notin A$. como $E_{11}AE_{11}$ é uma álgebra de divisão com unidade E_{11}, existe $a'' \in A$ tal que,

$$(E_{11}aE_{nn}a'E_{11})(E_{11}a''E_{11}) = E_{11}. \tag{2.18}$$

Tomando $E_{1n} = E_{11}aE_{nn}$ e $E_{n1} = E_{nn}a'E_{11}a''E_{11}$ temos,

$$E_{1n}E_{n1} = E_{11}. \tag{2.19}$$

Como $E_{n1} \in E_{nn}AE_{11}$ e usando a equação 2.19, nós temos $E_{n1} = E_{nn}E_{n1}$ e $E_{n1} = E_{n1}E_{11} = E_{n1}E_{1n}E_{n1}$. Comparando as duas relações temos,

$$(E_{nn} - E_{n1}E_{1n})E_{n1} = 0. \tag{2.20}$$

O elemento $E_{nn} - E_{n1}E_{1n}$ pertence à álgebra de divisão $E_{nn}AE_{nn}$. Se $E_{nn} - E_{n1}E_{1n} \neq 0$, multiplicando os dois lados da equação 2.20 obtemos $0 = E_{nn}E_{n1} = E_{n1}$, o que é uma contradição. Logo

$$E_{n1}E_{1n} = E_{nn}. \tag{2.21}$$

Com isso, definimos as matrizes elementares restantes como, $E_{nj} = E_{n1}E_{1j}$ e $E_{jn} = E_{j1}E_{1n}$, para $j = 2, \cdots, n-1$. Note que $E_{ij} = E_{i1}E_{1j}$ e $E_{1j}E_{kl} = \delta_{jk}E_{1l}$ é satisfeito para todos $i, j, k \in 1, \cdots, n$. Consequentemente, para todo $i, j, k, l = 1, \cdots, n$ temos

$$E_{ij}E_{kl} = E_{i1}E_{1j}E_{k1}E_{1l} = \delta_{jk}E_{i1}E_{11}E_{1l} = \delta_{jk}E_{i1}E_{1l} = \delta_{jk}E_{il} \tag{2.22}$$

Sendo assim, E_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$, são matrizes elementares de A. Pelo Lema 2.54, temos que $A \cong M_n(D)$, onde $D = E_{11}AE_{11}$. Agora suponha A uma álgebra prima não unitária. Então $A^{\#}$ é uma álgebra unitária prima, porém pelo resultado acima, temos que $A^{\#} \cong M_n(D)$ e, consequentemente simples. Logo temos uma contradição, pois A é um ideal próprio de $A^{\#}$. ∎

Note que temos que toda K-álgebra A prima de dimensão finita é unitária.

Capítulo 3

ÁLGEBRAS COM IDENTIDADES POLINOMIAIS

Dizemos que uma álgebra é uma PI-álgebra quando satisfaz alguma identidade polinomial não nula. No principal artigo estudado nesse trabalho [9], caracterizaremos classes de álgebras com essas propriedades, chamadas variedades de álgebras. Para isso, neste capítulo estudaremos os principais conceitos, propriedades e resultados relacionados a teoria de álgebras com identidades polinomiais. Os resultados aqui apresentados podem ser encontradas nas principais referências do assunto, como [4] e [5].

3.1 Identidades polinomiais

Para definirmos formalmente o conceito de PI-álgebra, apresentaremos o conceito de álgebra livre.

Definição 3.1. Sejam $\mathfrak{V}$ uma classe de álgebras e $F \in \mathfrak{V}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é dita uma álgebra livre na classe $\mathfrak{V}$, livremente gerada pelo conjunto X, se para toda álgebra $R \in \mathfrak{V}$, toda função $X \to R$ pode ser extendido de modo único para um homomorfismo $F \to R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada de rank ou posto de F.

Exemplo 3.2. Os anéis de polinômios $K[X]$ e $K\langle X\rangle$ são álgebras livres. Sendo que:

$K[X]$ é livre na classe de todas as álgebras unitárias associativas e comutativas.

$K\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias.

Chamaremos de polinômio qualquer elemento pertencente a alguma dessas álgebras.

Definição 3.3. Seja $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e R uma álgebra associativa. Dizemos que f é uma identidade polinomial de R se

$$f(r_1, \cdots, r_n) = 0 \text{ para todo } r_1, \cdots, r_n \in R.$$

A álgebra R é uma PI-álgebra se satisfaz uma identidade polinomial não trivial.

Exemplo 3.4. A álgebra de matrizes $M_2(K)$ satisfaz a identidade $[[x, y]^2, z] = 0$ conhecida como identidade de Hall.

Exemplo 3.5. Seja uma álgebra associativa R de dimensão finita m com $m < n$. Então R satisfaz a identidade standard de grau n

$$St_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S(n)} (\text{sign } (\sigma)) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0,$$

onde $S(n)$ é o grupo de permutações e sign (σ) denota o sinal da permutação σ. Além disso R também satisfaz a identidade de Capelli de grau n

$$Cap_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S(n)} (\text{sign } (\sigma)) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}.$$

Exemplo 3.6. A álgebra de Grassman satisfaz a identidade

$$[[x_1, x_2], x_3] = 0$$

Exemplo 3.7. A álgebra $M_n(K)$ não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau menor que $2n$.

Para o caso da álgebra $M_n(K)$ ainda se tem o seguinte resultado de Amitsur e Levitzki.

Teorema 3.8. *A álgebra $M_n(K)$ satisfaz a identidade standard St_{2n}.*

Definição 3.9. Seja $\{f_i(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. A classe $\mathcal{V}$ de todas de todas as álgebras associativas satisfazendo as identidades polinomiais $f_i = 0$, $i \in I$, é chamada de variedade (de álgebras associativas) definida (ou determinada) pelo sistema de identidades polinomiais $\{f_i \mid i \in I\}$. A variedade $\mathcal{W}$ é chamada de subvariedade de $\mathcal{V}$ se $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Se A é uma álgebra, dizemos que a variedade V é gerada por A se V é determinada pelas identidades de A denotada por var(A).

Seguem alguns exemplos de variedades que não contém álgebras de matrizes.

Exemplo 3.10. Sendo $k \in \mathbb{N}$, a classe de todas as álgebras nilpotentes de índice $n < k$, $\mathcal{N}_k$ é uma variedade definida pela identidade $x_1 \cdots x_k = 0$.

Exemplo 3.11. A classe das álgebras comutativas é uma variedade definida pela identidade $[x, y] = 0$. Esta será denotada por $\mathcal{V}_0$.

Exemplo 3.12. Seja G a álgebra de Grassmann, a variedade gerada por G será denotada por $\mathcal{V}_1$.

Definição 3.13. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade. Dizemos que o conjunto $T(\mathcal{V})$ de todas as identidades polinomiais satisfeitas pela variedade $\mathcal{V}$ é chamado de T-ideal de $\mathcal{V}$.

Claramente, $T(\mathcal{V})$ é um ideal de $K\langle X\rangle$ e além disso, é invariante ao por endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Basta observarmos que cada homomorfismo é dado pela substituição de variáveis x_i por polinômios g_i e, consequentemente, se $f(x_1, \cdots, x_n)$ era identidade de $\mathcal{V}$, o mesmo ocorrerá para $f(g_1, \cdots, g_n)$. Chamaremos qualquer ideal com essa propriedade de T-ideal.

Definição 3.14. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade, $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra e $Y \subset A$ um subconjunto de A. Dizemos que A é relativamente livre em Y (com respeito a $\mathcal{V}$), se para toda álgebra $B \in \mathcal{V}$ e toda função $\alpha : Y \to B$, existe um único homomorfismo $\beta : A \to B$ extendendo α. Denotaremos por $F(\mathcal{V}, Y)$.

A partir de uma classe $\mathcal{V}$ de álgebras, podemos construir uma variedade, como mostra o teorema de Birkhoff que iremos mostrar abaixo.

Definição 3.15. Seja $\mathcal{V}$ uma classe de álgebras. Nós denotamos por $C\mathcal{V}, S\mathcal{V}$ e $Q\mathcal{V}$, respectivamente, as classes obtidas por $\mathcal{V}$ tomando todas as somas diretas, subálgebras e álgebras quociente das álgebras de $\mathcal{V}$.

Teorema 3.16 (Teorema de Birkhoff)**.** *Uma classe de álgebras $\mathcal{V}$ é uma variedade se, e somente se, é fechada em relação a somas diretas, subálgebras e álgebras quociente, ou seja, $C\mathcal{V}, S\mathcal{V}, Q\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$.*

Demonstração. $\Longrightarrow$ Seja $\mathcal{V}$ uma variedade e seja $R_j \in \mathcal{V}$, $j \in J$. A soma direta $R = \sum_{j\in J} R_j$ consiste de todas as sequências $(r_j \mid j \in J)$, $r_j \in R$. Seja $f(x_1, \cdots, x_n)$ uma identidade polinomial para $\mathcal{V}$. Se $r^{(1)}, \cdots, r^{(n)} \in R$, $r^{(1)} = (r_j^{(i)} \mid j \in J)$, então

$$f(r^{(1)}, \cdots, r^{(n)}) = (f(r_j^{(1)}, \cdots, r_j^{(n)}) \mid j \in J).$$

Todas as coordenadas de $f(r^{(1)}, \cdots, r^{(n)})$ são iguais a 0 e $R \in \mathcal{V}$. Analogamente temos para $S\mathcal{V}, Q\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ é similar.

$\Longleftarrow$ Seja $C\mathcal{V}, S\mathcal{V}, Q\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ e seja $T(\mathcal{V}) \subset K\langle X\rangle$ o conjunto de identidades polinomiais satisfeitas pelas álgebras de $\mathcal{V}$. Nós denotamos por $\mathcal{M}$ a variedade definida pelas identidades de $T(\mathcal{V})$. Claramente, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$. Nós devemos provar que $\mathcal{V} = \mathcal{M}$. Seja m uma cardinalidade arbitrária e seja $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ um conjunto com m elementos. Seja N o conjunto de todos os elementos $f(x_1, \cdots, x_n)$ de $K\langle X\rangle$ que não são identidades polinomiais de $\mathcal{V}$. Representaremos $K\langle Y\rangle$ como uma união disjunta de dois subconjuntos $T_m(\mathcal{V})$ e N_m na seguinte maneira. Seja $f(y_{i_1}, \cdots, y_{i_n})$ um elemento qualquer de $K\langle Y\rangle$, onde $y_{i_1}, \cdots, y_{i_n}$ são n elementos diferentes de Y (e $n \leq m$).

Se $f(x_1, \cdots, x_n) \in T(\mathcal{V})$, então nós assumimos que $f(y_{i_1}, \cdots, y_{i_n}) \in T_m(\mathcal{V})$ e $f(x_1, \cdots, x_n)$ não é uma identidade polinomial de $\mathcal{V}$, ou seja, $f(x_1, \cdots, x_n) \in N$, então $f(y_{i_1}, \cdots, y_{i_n}) \in N_m$. Para todo $f = f(y_{i_1}, \cdots, y_{i_n}) \in N_m$ existe uma álgebra $R_f \in \mathcal{V}$ e elementos $r_{i_1 f}, \cdots, r_{i_n f} \in R_f$, tais que $f(r_{i_1 f}, \cdots, r_{i_n f}) \neq 0$ em R_f. Para cada $i \in I$, $i \neq i_1, \cdots, i_n$, nós escolhemos elementos arbitrários $r_{if} \in R_f$ e para cada $i \in I$ definimos elementos

$$z_i = (r_{if} \mid i \in I) \in \sum_{f \in N_m} R_f.$$

Como $C\mathcal{V}, S\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$, nós obtemos que a álgebra F gerada por z_i em $\sum_{f \in N_m} R_f$ pertence a $\mathcal{V}$. Por outro lado, se $g(y_{i_1}, \cdots, y_{i_n}) \in N_m$, então $g(z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}) \neq 0$, porque $g(r_{i_{1g}}, \cdots, y_{i_{ng}}) \neq 0$ para todo $g \in N_m$. Portanto o núcleo do homomorfismo canônico $K\langle Y \rangle \to F$ extendendo $y_i \to z_i$, $i \in I$, coincide com $T_m(\mathcal{V})$ e F é isomorfo a $F_m(\mathcal{M})$, a álgebra relativamente livre de dimensão m em $\mathcal{M}$. Finalmente, como $Q\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$, e toda álgebra m-gerada em $\mathcal{M}$ é uma imagem homomórfica de $F_m(\mathcal{M})$ que está em $\mathcal{V}$, obtemos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$, ou seja $\mathcal{V} = \mathcal{M}$. ∎

Definição 3.17. Para uma classe de álgebras $\mathcal{V}$ ou para uma álgebra R denotaremos por var $\mathcal{V}$ ou por var R a variedade de álgebras gerada pelas identidades polinomiais de $T(\mathcal{V})$ ou $T(R)$ e chamaremos esta variedade de variedade gerada por $\mathcal{V}$ ou R, respectivamente.

Corolário 3.18. *Se $\mathcal{V}$ é uma classe de álgebras associativas, então var $\mathcal{V} = QSC\mathcal{V}$,, ou seja por todas as somas diretas, subálgebras e álgebras quocientes geradas a partir de $\mathcal{V}$.*

Definição 3.19 (Produto de Malcev)**.** Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ duas variedades, denotamos por $\mathcal{U} \circ \mathcal{V}$, a variedade formada pelas álgebras W, tais que, W tem um ideal $H \in \mathcal{U}$ de modo que $W/H \in \mathcal{V}$. Dada uma variedade $\mathcal{M}$ e subvariedades $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$, denotamos por $\mathcal{U} \circ_{\mathcal{M}} \mathcal{V}$ o $\mathcal{M}$-produto de Malcev das variedades, dado por, $(\mathcal{U} \circ \mathcal{V}) \cap \mathcal{M}$.

Definição 3.20. Dizemos que duas identidades polinomiais são **equivalentes** se geram o mesmo T-ideal.

Definição 3.21. Um polinômio $f(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é multilinear de grau n se em cada monômio de f todas as variáveis $x_1, \cdots, x_n$ aparecem exatamente uma vez. Denotaremos por P_n o espaço vetorial de polinômios multilineares de grau n. Claramente dim $(P_n) = n!$ e tem como base

$$\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S(n)\}$$

Definição 3.22. Seja A uma PI-álgebra, o inteiro não negativo

$$c_n = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id} A}$$

é chamado de n-ésima codimensão da álgebra A.

Proposição 3.23. *Seja*

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X \rangle,$$

onde f_i são as componentes homogêneas de f de grau i em x_1. Temos que:

(i) Se o corpo base K é infinito e f é identidade polinomial de uma K-álgebra A, então f_i é identidade polinomial de A, para $i = 0, \cdots, n,$.

(ii) Se o corpo base tem característica 0, então $f = 0$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.

Demonstração. (i) Seja $V = \langle f \rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por f. Escolhendo $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$. Como V é um T-ideal,

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, \cdots, x_m) \in V, j = 0, 1, \cdots, n.$$

Considerando essas n equações com f_i, $i = 0, \cdots, n$ sendo as $n+1$ variáveis, temos um sistema de equações lineares com o seguinte determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i).$$

A matriz acima é uma matriz Vandermonde, e como os α_i são distintos para todo i, $D \neq 0$. Sendo assim temos que o sistema admite apenas a solução trivial, ou seja, $f_i \in V$ e dessa forma, consequências de f.

(ii) Como por (i), sabemos que as componentes homogêneas de cada variável em f pertencem a V, podemos considerar o caso em que f é homogêneo em cada variável. Seja $\deg_{x_1} f = d$. Vamos utilizar o processo de linearização, escrevendo $f(y_1+y_2, x_2, \cdots, x_m) \in V$ na forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_2, x_2, \cdots, x_m),$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Como $f_i \in V$, $i = 0, 1, \cdots, d$, por (i). Temos também que $\deg_{y_j} f_i < d$, $i = 1, \cdots, d-1$ e $j = 1, 2$, repetindo o processo indutivamente e para cada variável, temos um conjunto P de consequências multilineares de f. Para mostrar a equivalência temos que mostrar que $f \in \langle I \rangle^T$, ora basta notar que

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \cdots, x_m) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \cdots, x_m),$$

com o coeficiente binomial não nulo, pois o corpo tem característica 0. ∎

Lema 3.24. *Se d é um inteiro positivo e $f \neq 0$, $f \in K\langle X\rangle$, com $\mid X \mid \; = d$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n(K)$ não satisfaz f.*

Demonstração. Seja f de grau k e seja M o ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por todos monômios em $x_1, x_2, ..., x_d$ com grau maior que k. Como $A = K\langle X\rangle/M$ é uma álgebra de dimensão finita sobre K, podemos representar A como uma subálgebra de $M_n(K)$ para $n = \dim_K A$. Desde que $f \notin M$ sua imagem em A não é zero. Logo existem matrizes $a_1, a_2, ..., a_d$, tais que $f(a_1, a_2, ..., a_d) \neq 0$. ■

Agora, estudaremos alguns resultados que serão utilizados no capítulo 4, utilizando os pré requisitos vistos até o momento.

Proposição 3.25. *Seja A uma K-álgebra pertencente a uma variedade $\mathcal{V}$ gerada por polinômios da forma $\sum_\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ e B uma K-álgebra comutativa e associativa. Então a K-álgebra $C = B \otimes_K A$ também pertence a $\mathcal{V}$.*

Demonstração. É suficiente mostrar pela Proposição 3.23 que C satisfaz todas as identidades homogêneas de $T(\mathcal{V})$. Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T(\mathcal{V})$. Então para quaisquer $c_1, c_2, ..., c_n$, $f(c_1, c_2, ..., c_n)$ pode ser representado na forma de uma soma de elementos $g(b_1 \otimes a_1, \cdots, b_s \otimes a_s)$, $a_i \in A, b_j$, onde g é um polinômio da decomposição homogênea de f em cada variável x_k, $k \in \{1, \cdots, n\}$. Se g tem grau $\{i_1, \cdots, i_n\}$, então

$$g(b_1 \otimes a_1, \cdots, b_s \otimes a_s) = b_1^{i_1} b_2^{i_2} \cdots b_s^{i_s} \otimes g(a_1, a_2, \cdots, a_s) = 0.$$

Mas isso significa também que $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$. Logo $C \in \mathcal{V}$. ■

O próximo resultado é relacionado às álgebras nilpotentes.

Teorema 3.26 (Dubnov-Ivanov-Nagata-Highman)**.** *Seja R uma álgebra associativa não unitária sobre um corpo K de característica 0, tal que R satisfaz $x^k = 0$. Então existe um inteiro $d = d(k)$ dependendo apenas de k, tal que R é nilpotente de classe d,ou seja, R satisfaz a identidade polinomial $x_1 \cdots x_d = 0$.*

Demonstração. Vamos trabalhar módulo identidade $x^k = 0$, ou seja, na álgebra relativamente livre $F(\mathcal{N})$ das álgebras $\mathcal{N}$ definidas pela identidade polinomial $x^k = 0$. A linearização parcial de $x^k = 0$ é

$$f(x, y) = x^{k-1}y + x^{k-2}yx + \cdots + xyx^{k-2} + yx^{k-1} = 0.$$

Com algumas manipulações algébricas, obtemos

$$f(x, yz^j)z^{k-j-1} = x^{k-1}yz^{k-1} + x^{k-2}yz^jxz^{k-j-1} +$$

$$+ \cdots + xyz^jx^{k-2}z^{k-j-1} + yz^jx^{k-1}z^{k-j-1} = 0.$$

Como $f = 0$, nós obtemos

$$x^{k-1}yz^{k-1} = 0.$$

Por indução, a identidade $x^{k-1} = 0$ implica nilpotência. Sendo assim, para algum $d = d(k-1)$

$$x_1 \cdots x_d = \sum_i a_i b_i^{k-1} c_i, x_{d+2} \cdots x_{2d+1} = \sum_j u_j v_j^{k-1} w_j,$$

onde $b_i, v_j \in F(\mathcal{N})$ e a_i, c_i, u_j, w_j são constantes em K ou polinômios em $F(\mathcal{N})$. Então

$$x_1 \cdots x_d x_{d+1} x_{d+2} \cdots x_{2d+1} - \sum_{i,j} a_i (b_i^{k-1}(c_i x_{d+1} u_j) v_j^{k-1}) w_j = 0$$

e álgebra $F(\mathcal{N})$ é nilpotente. ■

3.1.1 Teorema de Kaplansky e outros resultados.

Definição 3.27. Seja um M um R-módulo, $E(M)$ o conjunto de endomorfismos do grupo abeliano M e $T_a : M \to M$, $T_a m = am$, $a \in R$ denotaremos por $C(M)$ o conjunto,

$$C(M) = \{\phi \in E(M) \mid T_a \phi = \phi T_a\}, \text{ para todo } a \in R.$$

Teorema 3.28. *Se M é um R-módulo simples, então $C(M)$ é um anel de divisão.*

Demonstração. Vamos mostrar que todo elemento em $C(M)$ tem um elemento inverso em $C(M)$. Note que se, para $\theta \in C(M)$, existe $\theta^{-1} \in E(M)$, $\theta^{-1} \in C(M)$, pela definição de $C(M)$.

Suponha $0 \neq \theta \in C(M)$, se $W = \theta(M)$, então para todo $r \in R$, $rW = r\theta(M) = T_r\theta(M) = \theta(T_r M) \subset \theta(M) = W$. Logo, pela irredutibilidade de M, $W = M$ e consequentemente, θ é sobrejetiva. Como θ também é injetiva, pois $Ker(\theta)$ é submódulo e consequentemente $Ker(\theta) = 0$. Logo θ e bijetiva e portanto, existe θ^{-1}. ■

A partir de agora, denotaremos $C(M)$ por Δ.

Definição 3.29. Seja R um anel primitivo e M um R-módulo simples e fiel, diz-se que R é denso em M se para cada n e $v_1, v_2, \cdots, v_n$ em M, linearmente independentes sobre Δ, e $w_1, w_2, \cdots, w_n$ em M existe um elemento $r \in R$, tal que $w_i = rv_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema 3.30 (Teorema da densidade)**.** *Seja R um anel primitivo e seja M um R-módulo fiel e simples. R é um anel denso de transformações lineares de M sobre Δ.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que é suficiente provar que, se V é um subespaço de dimensão finita de M sobre Δ e um $m \in M$, então existe um $r \in R$ com $rV = \{0\}$, mas $rm \neq 0$. Ora suponha que sempre existe esse r, então $Rrm \neq 0$, e pela irredutibilide de M, $Rrm = M$. Podemos, desse modo, achar um $s \in R$ com srm arbitrário e $srV = 0$. Dado $v_1, v_2, ..., v_n \in M$ linearmente independentes e $w_1, w_2, ..., w_n \in M$ e seja $V_i = span(v_j \mid j \neq i)$ sobre Δ. Como $v_i \notin V_i$, sabemos que existe $t_i \in R$ tal que $t_i v_i = w_i$, $t_i V_i = \{0\}$.Tomando $t = t_1 + t_2 + ... + t_n$, vemos que $tv_i = w_i$, para $i = 1, 2, ..., n$, ou seja, R é um anel denso de transformações lineares em M sobre Δ.

Mostraremos que qualquer que seja $V \subset M$ de dimensão finita sobre Δ e $m \in M$ tal que $m \notin V$, existe um $r \in R$ tal que $rV = 0$, mas $rm \neq 0$.

O caso em que dim $V = 1$ vem direto da fidelidade e da simplicidade do R-módulo M.

Seja $V = V_0 + \Delta w$ com dim $V_0 =$ dim $V - 1$ e $w \notin V_0$. Pela hipótese de indução, se $A(V_0) = \{x \in R \mid xV_0 = 0\}$, então para $y \notin V_0$ existe um $r \in A(V_0)$ tal que $ry \neq 0$. De outro modo $A(V_0)m = 0$, então $m \in V_0$. Observe que $A(V_0)$ é um ideal à esquerda de R e para $w \notin V_0$, $A(V_0)w = M$, pois M é um R-módulo simples. Suponha que um certo $m \in M - V$, seja tal que se $rV = \{0\}$, então $rm = 0$. Definimos $\tau : M \to M$ por: se $x \in M$ e $x = aw$, com $a \in A(V_0)$, então $\tau(x) = am$. Construímos τ de modo a ser um homomorfismo. Vamos mostrar que τ está bem definida em 0, já que $0 \in A(V_0)$, para isso tome $x = 0$, isso significa que $aw = 0$, consequentemente $aV = \{0\}$, e por hipótese, $am = 0$, ou seja, τ está bem definida em 0.

Claramente $\tau \in E(M)$. Além disso, se $x = aw$ com $a \in A(V_0)$ então para $r \in R$, $rx = r(aw) = (ra)w$, logo $\tau(rx) = \tau(raw) = ram = r(am) = r\tau(x)$ e consequentemente $\tau \in \Delta$. Note que $am = \tau(aw) = a\tau(w)$, ou seja $a(\tau(w) - m) = 0$, para todo $a \in A(V_0)$. Sendo assim, $m - \tau(w) \in V_0$ e consequentemente $m \in V_0 + \Delta w = V$. Isso contradiz a hipótese que $m \notin V$. Assim dado $m \in M - V$, existe $r \in R$ tal que $rV = 0$ e $rm \neq 0$ ■

Teorema 3.31. *Seja R um anel primitivo. Então para algum anel de divisão Δ, ou R é isomorfo a $M_n(\Delta)$, para algum n, ou dado $m \in \mathbb{N}$, existe um subanel S_m de R, tal que $M_m(\Delta)$ é imagem homomórfica de S_m.*

Demonstração. Como R é primitivo, então R age como um anel denso de transformações lineares de um espaço vetorial sobre um anel de divisão Δ. Se V é um espaço de dimensão finita sobre Δ, a densidade nos diz que R é isomorfo à $\mathcal{L}(V)$, ou seja, R é isomorfo a $M_n(\Delta)$ para algum n.

Se V não tem dimensão finita sobre Δ seja $v_1, v_2, ..., v_m, ...$ um conjunto linearmente independente infinito de V. Seja $V_m = span_\Delta(v_1, ..., v_m)$, $S_m = \{x \in R \mid xV_m \subset V_m\}$, e $W_m = \{x \in S_m \mid xV_m = 0\}$, aplicando o teorema da densidade em S_m/W_m, temos que S_m/W_n é isomorfo a $M_m(\Delta)$. ■

Teorema 3.32. *Seja D um anel de divisão com centro F e seja K um subcorpo maximal de D. Então $D \otimes_F K$ é um anel denso de transformações lineares sobre D considerado como um espaço vetorial sobre K.*

Demonstração. Em $E(D)$, endomorfismos do grupo aditivo de D, seja $D_l = \{T_a \mid a \in D, T_a : x \to ax$, para todo $x \in D\}$ e $K_r = \{L_k \mid k \in K, L_k : x \to xk$, para todo $x \in D\}$. Note que D_l e K_r são subconjuntos de $E(D)$ e qualquer elemento de K_r comuta com qualquer elemento de D_l.

Como D é um anel de divisão, para $d \neq 0$, $D_l d = D$, já que $T_a(d) \neq 0$ para todo $a \in D$, $a \neq 0$, e consequentemente $K_r D_l$ age irredutivelmente em D. Como um anel de endomorfimos em D, $K_l D_r$ age fielmente em D.

Seja Δ, o centralizador de $K_r D_l$ em $E(D)$. Como $D_l \subset K_r D_l$, $\Delta \supset D_r$. Logo $\Delta \subset K_r$, já que K_r é subcorpo maximal de D_r. Por outro lado, é direto que $K_r \subset \Delta$ e consequentemente $K_r = \Delta$. Com isso pelo teorema da densidade, temos que $K_r D_l$ é um anel denso de transformações lineares em D sobre K_r.

Note que $K \cong K_l \cong K_r$, temos que $D \otimes_F K$ é simples, logo $D \otimes_F K \cong K_r D_l$. ∎

Definição 3.33. Se D é um anel de divisão com centro F, dizemos que um corpo $K \subset F$ é um **corpo de decomposição** de D se $D \otimes K$ é um anel denso de transformações lineares em um espaço vetorial sobre K.

Teorema 3.34 (Teorema de Kaplansky)**.** *Se A é uma K-álgebra primitiva satisfazendo uma identidade polinomial de grau d, então A é uma álgebra simples de dimensão finita sobre seu centro com dimensão no máximo $\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil^2$.*

Demonstração. Como A é uma álgebra primitiva, ou $A \cong M_n(\Delta)$, para algum n e o anel de divisão Δ, ou para cada m existe uma subálgebra de A, tal que $M_m(\Delta)$ é uma imagem homomórfica dessa subálgebra. No entanto, subálgebras e imagens homomórficas de A, satisfazem as identidades polinomiais de A. Sendo assim no segundo caso, $M_m(\Delta)$ deveria satisfazer as identidades de A para todo m inteiro e, consequentemente, $M_m(Z)$, onde Z é o centro de Δ, também satisfaria as identidades de A. Entretanto isso contradiz o Lema 3.24. Logo apenas o primeiro caso acontece, ou seja, $A \cong M_n(\Delta)$. Sendo assim, A é simples.

Seja K subcorpo maximal de Δ. Do teorema anterior temos que $\Delta \otimes_Z K$ é um anel denso de transformações lineares sobre um espaço vetorial K. Como podemos supor que A satisfaz uma identidade polinomial multilinear f de grau d, $A \otimes_Z K$ também satisfaz. Ora temos pelo mesmo argumento usado acima que $A \otimes_Z K \cong M_n(K)$. Por outro lado $\dim_K(A \otimes_Z K) = \dim_Z(A)$, logo $\dim_Z(A) = n^2$. Como $M_n(K)$ satisfaz uma identidade de no máximo grau d, $(\dim_Z(A)) \leq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil^2$. ∎

Outro teorema estrutural que será utilizado, porém não demonstraremos será o teorema de Razmyslov-Kemer-Braun enunciado abaixo.

Teorema 3.35 (Razmyslov-Kemer-Braun)**.** *O radical de Jacobson* $Rad\,(A)$ *de uma PI-álgebra finitamente gerada sobre um corpo é um ideal nilpotente.*

Capítulo 4

CARACTERIZAÇÃO DE VARIEDADES NÃO MATRICIAIS

A partir de agora usaremos algumas propriedades conhecidas de $M_2(K)$ e alguns resultados de álgebra não comutativa para encontrar algumas caracterizações para variedades não matriciais e para variedades matriciais que não contém G e $G \otimes G$.

4.1 Variedades não matriciais

Com os pré requisitos já apresentados nos capítulos anteriores, podemos provar os resultados do artigo [9].

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo infinito K, neste capítulo iremos estudar as propriedades de $\mathcal{V}$ quando $M_l(K) \notin \mathcal{V}$, para todo $l \geq 2$. Primeiramente vamos mostrar uma propriedade que permitirá simplicar a definição de nosso objeto de estudo.

Proposição 4.1. *Seja l um inteiro positivo e seja $\mathcal{V}$ uma variedade, tal que $M_l(K) \notin \mathcal{V}$. Então $M_n(K) \notin \mathcal{V}$, para todo $n \geq l$.*

Demonstração. Suponha que existam $n > l$ inteiros positivos, tais que $M_l(K) \in \mathcal{V}$ e $M_n(K) \notin \mathcal{V}$. Considere ϕ como sendo o monomorfismo natural de $M_l(K)$ em $M_n(K)$, como $Im(\phi)$ é um subespaço de $M_n(K)$ e sendo um monomorfismo, um isomorfismo sobre sua imagem, temos que $T(M_l(K)) = T(Im(\phi))$ e consequentemente, $M_l(K) \in \mathcal{V}$. Por contradiçãom o resultado segue. ∎

Sendo assim, se $M_2(K) \notin \mathcal{V}$, então $M_l(K) \notin \mathcal{V}$, para qualquer $l > 2$ e podemos definir uma variedade não matricial como:

Definição 4.2. Dizemos que uma variedade $\mathcal{V}$ de álgebras associativas sobre um corpo infinito K é não matricial se $M_2(K) \notin \mathcal{V}$.

Vamos construir alguns exemplos de variedades não matriciais utilizando algumas propriedades de álgebras de Lie.

Proposição 4.3. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas. Se toda álgebra $A \in \mathcal{V}$, é tal que $A^{(-)}$ é solúvel, então $\mathcal{V}$ é não matricial. Além disso, para toda $A \in \mathcal{V}$, $var(A)$ também é não matricial.*

Demonstração. Temos que $sl_2 \subset M_2(K)^{(-)}$, logo $M_2(K)^{(-)}$ não é solúvel, pois sl_2 é simples e consequentemente $M_2(K)^{(n)} \supseteq sl_2$, para todo $n > 0$. Sendo assim $M_2(K) \notin \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}$ é não matricial. Como $A \in \mathcal{V}$, $var(A) \subset \mathcal{V}$ e consequentemente, não matricial. ∎

Primeiramente vamos caracterizar uma variedade não matricial qualquer quanto a nilpotência dos elementos de suas álgebras e algumas identidades que são satisfeitas. As demonstrações foram feitas em [9], mas convém mencionar que parte destas equivalências são devidas a [3].

Teorema 4.4. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo infinito K. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $M_2(K) \notin \mathcal{V}$, *ou seja,* $\mathcal{V}$ *é não matricial.*

(ii) *Seja* $A \in \mathcal{V}$ *uma álgebra finitamente gerada. Então para algum* s, A *satisfaz a identidade:*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2s-1}, x_{2s}] \equiv 0. \tag{4.1}$$

(iii) *Existe* m *tal que* $[x, y]^m \equiv 0$ *é uma identidade de* $\mathcal{V}$.

(iv) *Sejam* $A \in \mathcal{V}$ *e* $a, b \in A$ *elementos nil, então* $a + b$ *também é nil.*

Demonstração. (i)⇒(ii) Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas tal que $M_2(K) \notin \mathcal{V}$. Tomando B uma álgebra primitiva em $\mathcal{V}$, mostraremos que B é um corpo. De fato, utilizando o Teorema 3.34 e sua demonstração, $B \cong M_n(\Delta)$, onde Δ é um anel de divisão de dimensão finita sobre seu centro Z. Como $M_n(\Delta) \supseteq M_n(K)$, temos que $T(M_n(\Delta)) \subseteq T(M_n(K))$ e, consequentemente, $M_n(K) \in \mathcal{V}$. Sendo assim, como $\mathcal{V}$ é não matricial temos que $n = 1$ e $B \cong \Delta$.

Seja F um subcorpo maximal de Δ; então F é um corpo de decomposição de Δ, pelo Teorema 3.32, logo $\Delta \otimes_Z F \cong M_m(F)$. Como K é infinito, qualquer variedade pode ser definida por identidades polinomiais multi-homogêneas e, além disso, uma extensão do corpo base mantém identidades polinomiais multi-homogêneas. Logo $\Delta \otimes_Z F \cong M_m(F) \in \mathcal{V}$. Novamente, concluímos que $m = 1$ e, consequentemente, $B \cong F$.

Consideremos, agora, uma álgebra finitamente gerada $A = alg(a_1, \cdots, a_q) \in \mathcal{V}$. Pelos Lemas 2.35 e 2.36, temos o produto subdireto:

$$A/Rad(A) \to \prod_{i \in I} A/P_i$$

onde $\{P_i \mid i \in I\}$ é a família de ideais primitivos de A, com $A/P_i \in \mathcal{V}$, $i \in I$, sendo anéis primitivos pelo Lema 2.20. Dessa maneira, temos que $A/P_i \in \mathcal{V}$, $i \in I$ são álgebras comutativas e consequentemente $A/Rad(A)$ é comutativa. Além disso A é finitamente gerada, e pelo teorema de Razmyslov-Kemer-Braun seu radical de Jacobson é nilpotente, ou seja, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $(Rad(A))^s = 0$. Sendo assim, A satisfaz a identidade:

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2s-1}, x_{2s}] \equiv 0.$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) Considere a álgebra relativamente livre $B = F(\mathcal{V}, x, y)$. Então B satisfaz a identidade 4.1 para algum $m = s$. Dessa maneira, a identidade $[x, y]^m \equiv 0$ é satisfeita para todas as álgebras de $\mathcal{V}$.

(ii)$\Rightarrow$ (iv) Suponha que $A \in \mathcal{V}$. Assumindo que $a, b \in A$ são elementos nil, isto é, $a^k = 0$ e $b^m = 0$ para inteiros k, m considere $B = alg(a, b) \subset A$. Por hipótese B satisfaz a identidade 4.1 para algum s. Tomando $N = s(k + m)$ e $(a + b)^N = \sum_i w_i$, onde w_i são palavras de grau N nas letras a e b. Mostraremos que $w_i = 0$, para todo i. Primeiramente, abriremos w_i como um produto de subpalavras u_j de tamanho $k + m$, ou seja, $w_i = u_1 u_2 \cdots u_s$. Em cada u_i transladaremos os a's para a esquerda utilizando relações elementares como $aba = a[b, a] + a^2 b$, etc. Dessa maneira podemos rearranjar cada u_j como:

$$u_j = a^t b^{k+m-t} + \sum_\alpha \lambda_\alpha v_\alpha, \qquad \lambda_\alpha \in K, \qquad \text{some } 0 \leq t \leq k + m,$$

onde cada v_α contém no mínimo um comutador. Desde que $a^k = b^m = 0$, o primeiro termo é igual a zero. Então w_i é uma combinação linear de termos, onde cada termo é um produto de no mínimo s comutadores em alguns lugares. Esses comutadores podem ser movidos para esquerda, também por relações elementares do tipo $x[a, b] = [x, [a, b]] + [a, b]x$. Logo temos uma combinação de termos, onde cada um contém um produto de no mínimo s comutadores seguidos, que por hipótese é zero.

(iii)$\Rightarrow$(i) Assuma que $\mathcal{V}$ satisfaz (iii); então $M_2(K) \notin \mathcal{V}$ desde que $E_{12}, E_{21} \in M_2(K)$ e $[E_{21}, E_{12}] = E_{22} - E_{11}$ não é nil.

(iv)$\Rightarrow$(i) Assuma que $\mathcal{V}$ satisfaz (iv); então $M_2(K) \notin \mathcal{V}$ desde que $E_{12}, E_{21} \in M_2(K)$ são nil, porém $E_{12} + E_{21}$ não o é. ∎

No próximo teorema acrescentaremos mais algumas propriedades das álgebras contidas em variedades matriciais em relação às suas subálgebras e ideais.

Teorema 4.5. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo infinito. Então as condições do Teorema 4.4 são também equivalentes às seguintes condições:*

(v) Seja $A \in \mathcal{V}$; então qualquer coleção finita de elementos algébricos $a_1, ..., a_k \in A$ gera uma subálgebra $A_0 \subset A$ de dimensão finita.

(vi) Seja $A \in \mathcal{V}$; então para qualquer elemento nil $a \in A$, o ideal a esquerda Aa (ou o ideal a direita aA) é um ideal nil.

(vii) Seja $A \in \mathcal{V}$. Então para qualquer elemento nil $a \in A$, o ideal AaA é um ideal nil.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$(v) Seja A_0 gerada pelos elementos $a_1, \cdots, a_k \in A$ algébricos. Sabemos que $A_0/Rad(A_0)$ é comutativa e além disso que $Rad(A_0)$ é nilpotente, já que A_0 é finitamente gerada. Como as álgebras comutativas geradas por elementos algébricos são exatamente as álgebras algébricas, temos que $A_0/Rad(A_0)$ tem dimensão finita, pois é uma álgebra algébrica finitamente gerada. Como A_0 é uma extensão algébrica de uma álgebra algébrica, também é algébrica. Logo A_0 tem dimensão finita.

(v)$\Rightarrow$(i) Suponha que $M_2(K) \in \mathcal{V}$, pela Proposição 3.25, temos que $M_2(K[x]) = M_2(K) \otimes K[x] \in \mathcal{V}$.

Dessa maneira, construindo a álgebra $\langle t_1, t_2 \rangle \subset M_2(K[x])$, onde $t_1 = xE_{12}$ e $t_2 = E_{21}$, temos que $t_1^2 = t_2^2 = 0$, ou seja, t_1 e t_2 são algébricos, por hipótese $\langle t_1, t_2 \rangle$ (a subálgebra gerada por t_1, t_2) tem dimensão finita. No entanto $t = xE_{11} \in \langle t_1, t_2 \rangle$, e $\{x^k E_{11}, k \in \mathbb{N}\} \subseteq \langle t_1, t_2 \rangle$ é um subconjunto infinito linearmente independente, consequentemente, $\langle t_1, t_2 \rangle$ não tem dimensão finita, o que contradiz a hipótese.

(ii)$\Rightarrow$(vii) Sejam $a, b, c \in A$, $w = bac \in AaA$ e seja $B = alg(a, b, c)$. Pela propriedade (ii) existe s tal que (4.1) é satisfeita. Considerando $u = w^k$; essa palavra contém k letras a. Rearranjando u movendo todos os a's para a esquerda (pela adição de comutadores), temos que, $u = a^k u_0 + \sum_\alpha v_\alpha$, onde cada v_α contém ao menos um comutador. Por hipótese, $a^k u_0 = 0$. Sejam $N = sk$ e $v = w^N = u^s$, note que cada parcela da soma contém ao menos s comutadores. Utilizando relações elementares como $abc = a[b, c] + acb$, podemos rearranjar cada uma dessas parcelas de modo que cada uma tenha um produto de s comutadores adjacentes. Aplicando a condição (ii), temos que $w^N = 0$.

De forma análoga, mostramos que os ideais Aa e Aa também são nil para qualquer $a \in A$, assim sendo (ii)$\Rightarrow$(vi).

(vi)$\Rightarrow$(i) Considere que $M_2(K) \in \mathcal{V}$, temos $E_{12} \in M_2(K)$ é nilpotente, porém $E_{11} \in E_{12}M_2(K)$ e E_{11} não é nilpotente, logo $E_{11} \in E_{12}M_2(K)$ não é nil. Da mesma maneira, $E_{22} \in M_2(K)E_{12}$ e também não é nilpotente, e consequentemente $M_2(K)E_{12}$ não é nil. Por contradição temos que (vi)$\Rightarrow$(i).

(vii)⇒(i) Utilizando o mesmo argumento da demonstração do item anterior, tomando $E_{12} \in M_2(K)$ elemento nilpotente, temos que $E_{11} \in M_2(K)E_{12}M_2(K)$, não é nilpotente, o que contradiz a hipótese. ■

Aplicaremos o Teorema 4.4 para provar que a soma de variedades não matriciais também é não matricial e alguns resultados utilizando codimensão.

Corolário 4.6. *Seja A uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero. Se, para algum $n \geq 1$, $c_n(A) < c_n(M_2(K))$, então para quaisquer elementos nilpotentes $a, b \in A$, o elemento $a + b$ é nilpotente. Além disso todas as propriedades do teorema anterior também valem.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ a variedade gerada pela álgebra A. Por hipótese, $c_n(A) < c_n(M_2(K))$. Logo temos que $M_2(K) \notin \mathcal{V}$. ■

Corolário 4.7. *Seja A uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero. Assuma que, quando $n \to \infty$, $c_n(A) \approx a(1/n)^g \alpha^n$. Se, $\alpha < 4$, ou se $\alpha = 4$ mas $g > 3/2$, ou se $\alpha = 4$, $g = 3/2$ mas $a < 4/\sqrt{(\pi)}$, então para quaisquer elementos nil $a, b \in A$, o elemento $a + b$ é nil. Além disso todas as propriedades do teorema anterior também valem.*

Demonstração. Está provado em [4], que:

$$c_n(M_2(K)) \approx \frac{4}{n\sqrt{\pi n}} 4^n,$$

as hipóteses implicam que para n suficientemente grande, $c_n(A) < c_n(M_2(K))$. ■

Corolário 4.8. *Sejam $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ variedades não matriciais sobre um corpo qualquer. Considere que $\mathcal{W} = \mathcal{V} + \mathcal{U}$, denominada a menor variedade que contém todas as álgebras de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$. Então $\mathcal{W}$ também é uma variedade não matricial.*

Demonstração. Desde que $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ são variedades não matriciais, pelo Teorema 4.4 existe n tal que $\mathcal{V}$ satisfaz $[x, y]^n \equiv 0$ e m tal que $\mathcal{U}$ satisfaz $[x, y]^m \equiv 0$. Como $\mathcal{W}$ é a menor variedade que contém $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, utilizando o Teorema de Birkhoff 3.16, temos que $N = \max\{n, m\}$, é tal que $\mathcal{W}$ satisfaz $[x, y]^N \equiv 0$. Novamente, pelo Teorema 4.4, $\mathcal{W}$ é não matricial. ■

4.2 Variedades não matriciais que não contém G

A partir de agora, exigiremos que o corpo K tenha característica 0. Novamente, estaremos interessados em caracterizar as variedades não matriciais em relação a elementos nilpotentes de suas álgebras. A seguir enunciaremos o Lema 9 do artigo [7], sua demonstração envolve assuntos que não serão explorados nessa dissertação.

Lema 4.9. *Se uma variedade não matricial $\mathcal{L}$ é tal que, $G \notin \mathcal{L}$, então $\mathcal{L}$ satisfaz a identidade $[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0$ para algum n.*

Teorema 4.10. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo de característica zero. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $M_2(K) \notin \mathcal{V}$ e $G \notin \mathcal{V}$.

(ii) Para algum s, $\mathcal{V}$ satisfaz a identidade:

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2s-1}, x_{2s}] \equiv 0. \tag{4.2}$$

(iii) Seja $A \in \mathcal{V}$; então o ideal $A[A, A]A$ é nilpotente.

Demonstração. (i)⇒(ii) Segue do lema anterior.

(ii)⇒(iii) Assuma que a condição (ii) é verdadeira. Tome $A \in \mathcal{V}$ e considere um produto de s elementos do ideal $A[A, A]A$

$$w = a_1[b_1, c_1]d_1a_2[b_2, c_2]d_2 \cdots a_s[b_s, c_s]d_s,$$

onde $a_i, b_i, c_i, d_i \in A$ para $i = 1, \cdots, s$. Utilizando a identidade $a[b, c]d = [b, c]ad+[a, [b, c]]d$ podemos mover os comutadores para a esquerda. Dessa maneira, obtemos que w é uma combinação linear de termos da forma $[p_1, q_1] \cdots [p_s, q_s]r$ onde $p_i, q_i, r \in A$. Logo como a condição (ii) é verdadeira, pela identidade 4.2, temos que $w = 0$.

(iii)⇒ (i) Mostraremos por contradição: Suponha que $M_2(K) \in \mathcal{V}$. Como o comutador, $[E_{12}, E_{21}] = E_{11} - E_{22}$. Então o ideal $M_2(K)[E_{12}, E_{21}]M_2(K)$ não é nilpotente, logo $M_2(K) \notin \mathcal{V}$. Assuma $G \in \mathcal{V}$, então $(G[G, G]G)^N = 0$ para algum N. Porém $[e_1, e_2][e_3, e_4] \cdots [e_{2N-1}, e_{2N}] \neq 0$, contradição. ■

4.3 Variedades não matriciais que não contém $G \otimes G$

Para conseguirmos caracterizar as variedades não matriciais que não contém $G \otimes G$, precisaremos do seguinte resultado de [7]. Denotaremos por $\mathcal{V}_0$ a variedade das álgebras comutativas, $\mathcal{V}_1$ a variedade gerada pela álgebra de Grassmann G e $\mathcal{N}_k$ a variedade das álgebras nilpotentes de índice menor que k.

Teorema 4.11. *Suponha $\mathcal{M}$ uma variedade não matricial, $G \otimes G \notin \mathcal{M}$, e $\mathcal{V}$ é a maior variedade em $\{\mathcal{O}, \mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1\}$ contida em $\mathcal{M}$, então para algum k,*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_k \circ_{\mathcal{M}} \mathcal{V}.$$

onde $\mathcal{M}_k = \mathcal{M} \cap N_k$.

Primeiramente definiremos alguns conjuntos. Seja X um conjunto enumerável totalmente ordenado, representaremos X como,

$$X = Y \cup (\cup_{i=1}^{\infty} T_i),$$

onde T_i, Y são subconjuntos enumeráveis disjuntos dois a dois e $T = \cup_{i=1}^{\infty} T_i$.

Denotaremos por $\mathcal{J}$ o ideal de $F\langle X\rangle$ gerado pelos elementos da forma

$$a_1ua_2 + a_2ua_1,$$

com $a_1, a_2 \in T_i$, $i = 1, 2, \cdots ; u \in F\langle X\rangle \cup \{1\}$. As imagens dos conjuntos T_i, T sobre o homomorfismo natural $F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle/\mathcal{J}$ serão denotadas por E_i, E respectivamente. A imagem do conjunto Y denotaremos por Y.

O quociente $F\langle X\rangle/\mathcal{J}$ será denotado por $F_{E,Y}$.

Definição 4.12. Seja $W \subseteq X$. Definiremos o operador linear $S_W : F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle$ como:

1. Se f é um monômio e $\deg_w f \geq 2$ para algum $w \in W$, então $S_W(f) = 0$.

2. Se $f = f(w_1, \cdots, w_n, x_1, \cdots, x_m)$ é um monômio, $w_i \in W, x_i \notin W$; $w_1 < w_2 < \cdots < w_n$; $\deg_{w_i} f = 1$; $n \geq 0$, então

$$S_W(f) = \sum_{\sigma \in S(n)} (-1)^{\sigma} f(w_{\sigma(1)}, \cdots, w_{\sigma(n)}, x_1 \cdots x_m),$$

onde $S(n)$ é o grupo simétrico de grau n. O operador S_A será denominado simetrizador em relação ao conjunto A.

Utilizando das propriedades do grupo simétrico, obtemos as seguintes propriedades dos simetrizadores:

i. Se $W \cap U = \emptyset$, então

$$S_W(S_U(f)) = S_U(S_W(f)).$$

ii. Se f é homogêneo e linear com respeito as variáveis em W, então

$$S_W(S_W(f)) = n! S_W(f)$$

onde n é o número de variáveis de f em W.

Definição 4.13. Seja f um polinômio que não depende de variáveis em T_i para $i > k$, definiremos ${}_TS : F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle$ como, ${}_TS = S_{T_1} \cdots S_{T_k}(f)$. Denotaremos ${}_TS(F\langle X\rangle) = M_{T,Y}$.

O homomorfismo natural $F\langle X\rangle \to F_{E,Y}$ induz um homomorfismo de $\phi : M_{T,Y} \to F_{E,Y}$.

Lema 4.14. *O homomorfismo $\phi : M_{T,Y} \to F_{E,Y}$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Suponha $f \in \ker\phi = M_{T,Y} \cap \mathcal{J}$. Como os espaços $M_{T,Y}, \mathcal{J}$ são homogêneos e $f \in M_{T,Y}$, podemos assumir que $f = {}_TS(g)$, onde g é um polinômio multilinear com respeito as variáveis em T. Dessa maneira temos que:

$$_TS(f) = {}_TS({}_TS(g)) = S_{T_1}S_{T_1}\cdots S_{T_k}S_{T_k}(g) = n_1!\cdots n_k!f, \tag{4.3}$$

onde n_i é o número de variáveis em T_i que g depende. Por outro lado $_TS(\mathcal{J}) = 0$. Como $f \in \mathcal{J}$, $_TS(f) = 0$. Com isso e 4.3, temos que $f = 0$.

Resta mostrar que $M_{T,Y} + \mathcal{J} = F\langle X\rangle$. Suponha que f é um monômio arbitrário. Se $\deg_t f \geq 2$ para algum $t \in T$, então por definição de $\mathcal{J}$, temos que $f \in \mathcal{J}$. Caso contrário, $_TS(f) = n_1!\cdots n_k!f(\mathrm{mod}\mathcal{J})$, onde n_i é o número de variáveis em T_i ocorrendo em f. ∎

Lema 4.15. *Seja Γ um T ideal arbitrário de $F\langle X\rangle$. Então*

$$\phi(\Gamma \cap M_{T,Y}) = \Gamma(F_{E,Y}).$$

Demonstração. Suponha $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in \Gamma \cap M_{T,Y}$. Dessa maneira $\phi(f) = f(\phi(x_1), \cdots, \phi(x_n)) \in \Gamma(F_{E,Y})$. Por outro lado, suponha $g \in \Gamma(F_{E,Y})$. Podemos assumir que g é homogêneo; mas dessa maneira Γ contém um polinômio homogêneo $f = f(t_1^{(1)}, \cdots, t_{n_1}^{(1)}, \cdots, t_1^{(k)}, \cdots, t_{n_k}^{(k)}, y_1, \cdots, y_s)$, $t_i^{(j)} \in T_j$, $y_i \in Y$, onde temos que, $g = f(e_1^{(1)}, \cdots, e_{n_1}^{(1)}, \cdots, e_1^{(k)}, \cdots, e_{n_k}^{(k)}, y_1, \cdots, y_s)$, $e_i^{(j)} \in E_j, y_i \in Y$. Tome

$$h = \tfrac{1}{n_1!\cdots n_k!}{}_TS(f).$$

É direto que $h \in \Gamma \cap M_{T,Y}$. Usando a definição de $F_{E,Y}$, temos que $\phi(h) = g$. ∎

Vamos agora definir mais algumas estruturas que serão utilizadas adiante.

Definição 4.16. Seja Z o subespaço de $F\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto X. Um ideal I da álgebra $F\langle X\rangle$ é chamado de S-ideal se, para qualquer $f(x_1, \cdots, x_n) \in I$ e $z_1, \cdots, z_n \in Z$ nós temos $f(z_1, \cdots, z_n) \in I$, ou seja, se I é estável sob transformações lineares.

É claro que qualquer S-ideal é estável sob linearizações, já que é gerado por um conjunto de polinômios multilineares em I.

Definição 4.17. Sendo A uma álgebra e Z um subespaço de A que gera A como anel. Um ideal de $F\langle X\rangle$ da forma $T[A, Z] = \{f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle \mid \forall z_1, \cdots, z_n \in Z, f(z_1, \cdots, z_n) = 0\}$ é chamado de ideal de identidades do par (A, Z).

Definição 4.18. Chamaremos de $F_{t,r}$ a subálgebra de $F_{E,Y}$ gerada pelo conjunto

$$\cup_{i=1}^{t} E_i \cup \{y_1, \cdots, y_r\}.$$

A seguir apenas enunciaremos a Proposição 1 de [7] que será utilizada na demonstração do Teorema 4.11.

Proposição 4.19. *Para qualquer T ideal Γ, existem $t, r \in \mathbb{N}$, tais que $\Gamma = T[A, Z]$, onde $A = F_{t,r}/\Gamma(F_{t,r})$ e Z é o espaço gerado pela classe de elementos*

$$\cup_{i=1}^{t} E_i \cup \{y_1, \cdots, y_r\}.$$

A partir de agora vamos considerar I o S-ideal gerado pelos polinômios

$$[x_1, x_2, x_3], \sum_{\sigma \in S(3)} [x_{\sigma(1)}, y_1][x_{\sigma(2)}, y_2][x_{\sigma(3)}, y_3], \tag{4.4}$$

onde $x_i, y_j \in X$. Seja $G_2 = F\langle X \rangle / I$. Dessa maneira essa álgebra é definida pelas relações

$$[x_1, x_2, x_3] = 0 \tag{4.5}$$

$$\sum_{\sigma \in S(3)} [x_{\sigma(1)}, y_1][x_{\sigma(2)}, y_2][x_{\sigma(3)}, y_3] = 0 \tag{4.6}$$

onde x_i, y_j são os geradores arbitrários.

Nesta sessão vamos mostrar que G_2 é análoga de certa maneira com $G \otimes G$.

Lema 4.20. *Seja G^* a álgebra de Grassmann com unidade, então $G^* \otimes G^*$ é uma imagem homomorfica de G_2.*

Demonstração. Sejam e_i geradores de G^*. Identificaremos $1 \otimes 1$ por 1, $e_i \otimes 1$ por e_i e $1 \otimes e_i$ por f_i. A álgebra $G^* \otimes G^*$ é gerada pelo conjunto contável $\{e_1, e_2, \cdots\} \cup \{f_1, f_2, \cdots\} \cup \{1\}$. Usando o fato que e_i comuta com f_j e que em G é satisfeita a identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$, as relações de G_2 são satisfeitas pelos geradores e o resultado segue. ■

Definição 4.21. Seja $f \in F\langle X \rangle$ um polinômio homogêneo em todas variáveis, chamaremos f de polinômio comutador se, f pode ser representado como uma combinação linear de polinômios da forma $[y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}]$, onde $y_i \in X$.

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada em [7], no Lema 4. Ele será fundamental para provarmos os próximos resultados.

Lema 4.22. *Suponha W um S-ideal tal que $W \supseteq I$. Se existe um polinômio comutador g, tal que $g \in W$ e $g \notin I$, então existe um polinômio comutador $f \in W$ tal que:*

i. O polinômio $f \notin I$.

ii. O polinômio f pode ser escrito como $f = \sum_{\sigma \in S(k)} (-1)^\sigma h(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)}, y_1, \cdots, y_l)$, onde h é um polinômio comutador, e x_i, y_j, são dois a dois distintos em X.

iii. As variáveis x_i, y_i tem graus, deg $_{x_i} f = 1$ e deg $_{y_i} f = 2$.

Lema 4.23. *Suponha W um S-ideal e $W \supseteq I$. Se W contém um polinômio comutador f, tal que $f \notin I$, então W contém um polinômio da forma $[z_1, t_1]^2 \cdots [z_p, t_p]^2$, onde z_i, t_j são variáveis duas a duas distintas em X.*

Demonstração. Pelo Lema 4.22, temos que f satisfaz as propriedades i,ii e iii.

Provaremos por indução sobre o grau de f. Considere que deg $f = 2$, o resultado é direto.

Vamos analisar o caso para

$$\deg f \geq 2, f = \sum_{\sigma \in S(n)} (-1)^\sigma h(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)}, y_1 \cdots, y_l).$$

Existem três possibilidades.

Caso 1. $l \geq 2$. Vamos mostrar que

$$f \equiv [y_{l-1}, y_l]^2 f_1(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_{l-2}) (\bmod\ I), \tag{4.7}$$

onde f_1 é um polinômio comutador. Como f é um polinômio comutador e $[x_1, x_2, x_3] = 0$, então f pode ser representado como uma combinação linear de polinômios da forma

$$[z_1, z_2][z_3, z_4][z_5, z_6][z_7, z_8] g_z, \tag{4.8}$$

onde $z_1 \in \{x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_l\}$, e g_z é um polinômio comutador que não depende de y_{l-1}, y_l.

Podemos assumir que $z_1 = z_3 = y_{l-1}$ (ou podemos usar que $[x_1, x_2, x_3] = 0$). Podemos assumir, também, que $z_2 = y_l$. No caso $z_2 \neq y_l$, mas $z_4 = y_l$, podemos, novamente usar a propriedade $[x_1, x_2, x_3] = 0$. Se $z_2 \neq y_l$ e $z_4 \neq y_l$, podemos assumir $z_6 = z_8 = y_l$. Nesse caso usando as propriedades de comutador de G_2, obtemos que $f \equiv \frac{-1}{2} [y_{l-1}, y_l]^2 [z_5, z_4] (\bmod I)$. A congruência 4.7 está provada.

Seja W_1 o S-ideal gerado pelo conjunto $\{f_1\} \cup I$. Usando as propriedades de comutador de G_2 e a congruência 4.7 temos que $[y_{l-1}, y_l]^\beta W_1 \subseteq W$. Desde que $f_1 \notin I$ e deg $f_1 <$ deg f, segue pela hipótese indutiva que o lema é verdadeiro para W_1 e, consequentemente, pelo que foi mostrado acima, para W.

Caso 2. $l = 1$. Mostraremos que esse caso é impossível. Com efeito, para algum $\alpha \in F$, nós temos

$$f \equiv \alpha \sum_{\sigma \in S(K)} (-1)^{\sigma} [x_{\sigma(1)}, y_1][x_{\sigma(2)}, y_1][x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}][x_{\sigma(k-1)}, x_{\sigma(k)}] = 0 (\text{mod } I).$$

Caso 3. $l = 0$. Tomaremos, nesse caso, $f = St_{2q}(x_1, \cdots, x_{2q})$. Como A é um S-ideal, nós temos que $g = St_{2q}(y_1, y_2, x_3, \cdots, x_{2q})[y_1, y_2] \in A$, onde $x_i, y_i \in X$. Se $g \notin I$, então g satisfaz as condições do caso 1 e $g \equiv [y_1, y_2]^2 f_1(x_3, \cdots, x_{2q})(\text{mod } I)$, onde $f_1 \notin I$. Se A_1 é o S-ideal gerado pelo conjunto $\{f_1\} \cup I$, então, usando $[x_1, x_2, x_3] = 0$, temos que $[y_1, y_2]^2 A_1 \subseteq A$. Como deg $f_1 <$ deg f, segue o resultado por hipótese de indução.

Resta provar que $g \notin I$. Usando o Lema 4.20, é suficiente provar que $G^* \otimes G^*$ satisfaz a relação

$$\sum_{\sigma, \tau \in S(2)} St_{2q}(y_{\tau(1)}, z_{\sigma(1)}, x_3, \cdots, x_{2q})[y_{\tau(2)}, z_{\sigma(2)}] \neq 0 \tag{4.9}$$

para algum $y_i, z_j, x_s \in \{e_1, e_2, \cdots\} \cup \{f_1, f_2, \cdots\}$ (o lado esquerdo de 4.9 é a linearização de g). Tomando $y_1 = e_1, y_2 = f_1, z_1 = e_2, z_2 = f_2, x_i = e_i$. Então o lado esquerdo de 4.9 é igual a

$$St_{2q}(e_1, \cdots, e_{2q})[f_1, f_2] + St_{2q}(f_1, f_2, e_3, \cdots, e_{2q})[e_1, e_2] = [2(2q)! + 4q(2q-2)!]e_1 \cdots e_{2q} f_1 f_2 \neq 0.$$

O que finaliza a demonstração. ■

Se A é uma álgebra, nós denotaremos por $T[A]$ o ideal das identidades de A. Seja $\Gamma_2 = T[G \otimes G]$, onde G é a álgebra de Grassmann de dimensão enumerável, e seja $\Gamma_1 = T[G]$.

Proposição 4.24. *Os T-ideais $T[G_2]$ e $T[G \otimes G]$ são equivalentes.*

Demonstração. Sabemos que $\Gamma_1 = \{[x, y, z]\}^T$, o T-ideal gerado pela identidade $[x, y, z]$. Portanto, como G^* satisfaz a identidade $[x, y, z] = 0$, sabemos que $T[G^*] = \Gamma_1$. Dessa maneira $T[G^* \otimes G^*] = \Gamma_2$. Portanto, basta provar que $T[G^* \otimes G^*] = T[G_2]$.

Seja $\mathcal{L}$ o subespaço de G^* gerado pelos elementos $1 = 1 \otimes 1$, $e_i = e_i \otimes 1$, $f_i = 1 \otimes e_i$. Considere o S-ideal das identidades $I_1 = T[G^* \otimes G^*, \mathcal{L}]$ do par $(G^* \otimes G^*, \mathcal{L})$. Obviamente, $T[G^* \otimes G^*]$ é o maior T-ideal contido em I_1 e $T[G_2]$ é o maior T-ideal contido em I. Logo, temos que provar somente que $I_1 = I$.

Segue do Lema 4.20 que $I_1 \supseteq I$. Suponha que $f \in I_1$, $f \notin I$. Como I_1, I são S-ideais, nós podemos assumir que f é um polinômio multilinear nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$.

Se $A = \{x_1, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$, onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, então nós denotamos por x_A o monômio $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$. Módulo I o polinômio f pode ser representado da forma

$$f = \sum_A x_A f_A,$$

onde f_A é um polinômio comutador nas variáveis em $\{x_1, \cdots, x_n\} \setminus A$. Seja N o conjunto de cardinalidade máxima tal que $f_N \notin I$. Podemos assumir, sem perda de generalidade que $N = \{x_1, \cdots, x_k\}$. Considere o polinômio $g(x_{k+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) \mid_{x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1}$. Desde que $f \in I_1$, nós temos que $g \in I_1$. Sendo assim, $g \equiv f_N (\text{mod } I)$. Portanto, $f_N \subseteq I_1$. Portanto pelo Lema 4.23, I_1 contém o polinômio $h = [z_1, t_1]^2 \cdots [z_p, t_p]$ para algum p, onde z_i, y_j são distintos dois a dois em X. Falta mostrar que $h \notin I_1$. Tome $z_i = e_{2i-1} + f_{2i-1}$, $t_i = e_{2i} + f_{2i}$. Dessa maneira, temos $[z_1, t_1]^2 \cdots [z_p, t_p]^2 = 4^p e_1 \cdots e_{2p} f_1 \cdots f_{2p}$, ou seja, $h \notin I_1$. ∎

Proposição 4.25. *Suponha Γ um T-ideal, tal que $\Gamma \supseteq \Gamma_2$, $\Gamma \neq \Gamma_2$. Existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma \supseteq \Gamma_1^q$.*

Demonstração. Considere o S-ideal $J = \Gamma + I$. Como Γ_2 é o maior T-ideal contido em I e $\Gamma \neq \Gamma_2$, então $J \neq I$. Tome $f \in J$ e $f \notin I$. Como J, I são S-ideais, podemos assumir que f é um polinômio multilinear nas variáveris $x_1, \cdots, x_n$. Como na Proposição 4.24, vamos representar f como

$$f = \sum_A x_A f_A,$$

onde f_A é um polinômio comutador nas variáveis $\{x_1, \cdots, x_n\} \setminus A$. Seja A o conjunto de maior cardinalidade tal que $f_A \notin I$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $A = \{x_1, \cdots, x_k\}$. Tome

$$g(y_1, \cdots, y_k, z_1, \cdots, z_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n), \tag{4.10}$$

com $x_1 = [y_1, z_1], \cdots, x_k = [y_k, z_k]$ e y_i, z_j, x_s são variáveis distintas 2 a 2 em X. Claramente,

$$g \equiv [y_1, z_1] \cdots [y_k, z_k] f_A(x_{k+1}, \cdots, x_n) \ (\text{mod } I). \tag{4.11}$$

Nós vamos mostrar que $g \in S$. Como $f \in S$, nós temos $f = f_1 + f_2$, onde $f_1 \in \Gamma$ e $f_2 \in I$. Definimos os polinômios g_1, g_2 da mesma maneira que g na equação 4.10, só que ao invés de f usaremos respectivamente f_1 e f_2. Dessa maneira temos $g = g_1 + g_2$.

Como Γ é um T-ideal temos $g_1 \in \Gamma$. O polinômio f_2 pode ser representado da forma $f_2 = \sum_i u_i h_i v_i$, onde $u_i, v_i \in F\langle X \rangle \cup \{1\}$ e h_i são os polinômios da forma dada em 4.4. Se $x_1, \cdots, x_k$ não aparecem em h_i, então

$$u_i h_i v_i = \sum u' h_i v', \tag{4.12}$$

onde $x_1 = [y_1, z_1], \cdots, x_k = [y_k, z_k]$. Por outro lado, o lado esquerdo da equação 4.12 pertence a um S-ideal gerado por polinômios da forma $[x_1, x_2, x_3]$. Logo $g_2 \in I$. Dessa maneira segue de 4.11 que $[y_1, z_1] \cdots [y_k, z_k] f_A \in I$, onde f_A é um polinômio comutador, $f_A \notin I$. Usando a identidade $[x_1, x_2, x_3] = 0$, temos

$$[y_1, z_1] \cdots [y_k, z_k] E \subseteq S, \tag{4.13}$$

onde E é um S-ideal gerado por$\{f_A\} \cup I$. Pelo Lema 4.23, $[y_{k+1}, z_{k+1}]^2 \cdots [y_p, z_p]^2 \in E$, para algum p. Portanto, utilizando 4.13 e a identidade $[x_1, x_2, x_3] = 0$, obtemos $[y_1, z_1]^2 \cdots [y_p, z_p]^2 \in S$.

Seja

$$h(x_1, x_2, t_1, t_2) = \sum_{\sigma, \tau \in S(2)} [x_{\sigma(1)}, t_{\tau(1)}][x_{\sigma(2)}, t_{\tau(2)}],$$

onde $x_i, t_j \in X$ (h é a linearização do polinômio $[y, z]^2$). Como S é um S-ideal, segue que

$$u(x_1, \cdots, x_{2p}, t_1, \cdots, t_{2p}) = h(x_1, x_2, t_1, t_2) \cdots h(x_{2p-1}, x_{2p}, t_{2p-1}, t_{2p}) \in S,$$

onde x_i, t_j são variáveis duas a duas distintas em X.

Seja $v(x_1, \cdots, x_{4p}, y_1, \cdots, y_{4p}) = u(c_1, \cdots, c_{4p})$, onde $c_i = [x_i, y_i]$ e v é multilinear. Vamos mostrar que $v \in \Gamma$. Com efeito, como $u \in S = \Gamma + I$, nós temos que $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in \Gamma$ e v_2 pertence em um S-ideal gerado pelos polinômios $[c_i, c_j, c_k]$,

$$\sum_{\sigma \in S(3)} [c_{\sigma(1)}, c_4][c_{\sigma(2)}, c_5][c_{\sigma(3)}, c_6],$$

onde $c_i = [x_i, y_i]$. Portanto é suficiente mostrar que esses polinômios pertencem em Γ_2, ou, equivalentemente, que a álgebra $G \otimes G$ satisfaz as identidades

$$[c_1, c_2, c_3] = 0 \tag{4.14}$$

$$\sum_{\sigma \in S(3)} [c_{\sigma(1)}, c_4][c_{\sigma(2)}, c_5][c_{\sigma(3)}, c_6] = 0 \tag{4.15}$$

com $c_i = [x_i, y_i]$.

A álgebra $G^* \otimes G^*$ pode ser decomposta em relação a seu centro Z como

$$G^* \otimes G^* = Z + \sum_i e_i Z + \sum_i f_i Z + \sum_{i,j} e_i f_j Z.$$

Utilizando essa decomposição, temos que para quaisquer $x_i, y_i \in G^* \otimes G^*$ temos,

$$c_i = [x_i, y_i] \in Z + \sum_i e_i Z + \sum_i f_i Z.$$

E, consequentemente, as identidades 4.14 e 4.15 são satisfeitas.

Ora, se temos um polinômio $g = f_1 \cdots f_n \in \Gamma$, onde Γ é um T-ideal e os polinômios $g, f_1, \cdots, f_n$ são multilineares, então $T_1 \cdots T_n \subseteq \Gamma$, onde $T_i = \{f_i\}^T$. Somando isso ao que foi mostrado acima temos que $T^p \subseteq \Gamma$, onde T é o T-ideal gerado pelo conjunto $\{h_i(c_1, c_2, c_3, c_4)\} \cup \Gamma_2$, onde $c_i = [x_i, y_i]$. Resta provar que $T \subseteq \Gamma_1^r$. Utilizando o Lema 6 de [7], temos que a inclusão é válida para $r = 7$. ■

Para os próximos resultados, fixaremos uma variedade não matricial $\mathcal{M}$ e denotaremos por Γ o ideal gerado pelas identidades polinomiais de $\mathcal{M}$. Suponha p, q dois inteiros não negativos arbitrários. Seja $\overline{F}_{p,q} = F_{p,q}/T(F_{p,q})$. A imagem dos conjuntos E_i, $Y_q = \{y_1, \cdots, y_q\}$ sobre o homomorfismo natural $F_{p,q} \to \overline{F}_{p,q}$ será denotado por $\overline{E}_i$, $\overline{Y}_q = \{z_1, \cdots, z_q\}$ respectivamente.

Seja $U_{p,q}$ o ideal de $\overline{F}_{p,q}$ gerado por todos os elementos da forma $[z_i, z_j]$, $[e, f, z_i]$, $[ef, gh]$, $[e, f, g]$, onde

$$z_i, z_j \in \overline{Y}_q, e, f, g, h \in \bigcup_i^p \overline{E}_i.$$

Usaremos o Lema 7 de [7], que não será demonstrado, para provar os resultados abaixo.

Lema 4.26. *Se p, q são arbitrárias, então $U_{p,q}$ é um ideal nilpotente da álgebra $\overline{F}_{p,q}$.*

Com os próximos dois resultados e as proposições acima, seremos capazes de provar o torema do início do capítulo

Proposição 4.27. *Para algum p existe $\alpha = \alpha(p)$ tal que $T[\overline{F}_{p,0}] \supseteq \Gamma_2^\alpha$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.26, é suficiente mostrar que $T[\overline{F}_{p,0}/U_{p,0}] \supseteq \Gamma_2$. Pela Proposição 4.24, temos que provar somente que na álgebra $\overline{F}_{p,0}/U_{p,0}$ os geradores em $\bigcup_{i=1}^p E_i$ satisfaz as identidades 4.5 e 4.6.

Nesse caso o ideal $U_{p,0}$ é gerado pelos elementos $[e, f, g]$, $[ef, gh]$, onde $e, f, g, h \in \bigcup_{i=1}^p E_i$. A identidade 4.5 segue da definição de $U_{p,0}$. Na álgebra $\overline{F}_{p,0}$ os geradores de em $\bigcup_{i=1}^p E_i$ satisfazem módulo $U_{p,0}$ a relação

$$\sum_{\sigma \in S(3)} [x_{\sigma(1)}, y_1] x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} = 0. \tag{4.16}$$

Pela relação , temos

$$0 \equiv \sum_{\sigma \in S(3)} [[x_{\sigma(1)}, y_1] x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}, y_2, y_3] = 2 \sum_{\sigma \in S(3)} [[x_{\sigma(1)}, y_1][x_{\sigma(2)}, y_2] x_{\sigma(3)}, y_3] \equiv$$

$$2 \sum_{\sigma \in S(3)} [[x_{\sigma(1)}, y_1][x_{\sigma(2)}, y_2] x_{\sigma(3)}, y_3] \equiv 2 \sum_{\sigma \in S(3)} [x_{\sigma(1)}, y_1][x_{\sigma(2)}, y_2][x_{\sigma(3)}, y_3]$$

O que finaliza a demonstração. ■

Vamos fixar t, r números naturais tais que o T-ideal Γ satisfaz a conclusão da Proposição 4.19, e $p = t + tr$.

Lema 4.28. *Suponha $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ é um polinômio multilinear e $f \in T[\overline{F}_{P,0}]$. Seja T_1 o T-ideal gerado pelo polinômio multilinear*

$$g = f(x_1 \cdots x_n) St_{2(r+n)}(y_1, \cdots, y_{2(r+n)}),$$

onde $x_i, y_j \in X$, e St_k é o polinômio standard, e seja T_2 o T-ideal gerado por todos polinômios multilineares

$$h_w = f(w_1 St_{2(r+1)}(y_1^{(1)}, \cdots, y_{2(r+1)}^{(1)}) w_1 St_{2(r+1)}(y_1^{(n)}, \cdots, y_{2(r+1)}^{(n)}))$$

onde $w_i, y_j^{(i)} \in X$, algumas variáveis W_i podem ser ausentes, e W é um conjunto de variáveis w_i ocorrendo em h_w. Então $T_1^\beta, T_2^\beta \subseteq \Gamma$ para algum número natural β.

Demonstração. Pela Proposição 4.19, $\Gamma = T[A, Z]$, onde $A = \overline{F}_{t,r}$, e Z é o subespaço de A gerado por um conjunto $\cup_{i=1}^t \overline{E}_i \cup \overline{Y}_r$. Pelo Lema 4.26, o ideal $U_{t,r}$ é nilpotente. Seja β o índice de nilpotência de $U_{t,r}$. Sendo assim, é suficiente provar que $g, h_w \in U_{t,r}$ para quaisquer $x_i, y_i, y_j^{(i)}$, $w_i \in \cup_{i=1}^t \overline{E}_i \cup \overline{Y}_r$.

Considere a subálgebra D de $\overline{F}_{t,r}$ gerada pelo conjunto $\cup_{i=1}^t \overline{E}_i \cup (\cup_{j=1}^r \cup_{i=1}^t z_j \overline{E}_i)$, onde $z_j \in \overline{Y}_r$. Desde que os elementos de $z_j \overline{E}_i$ satisfaz as propriedades de $\mathcal{J}$, a álgebra D é uma imagem homomórfica de $\overline{F}_{P,0}$, onde $p = t + tr$.

Se mais de r elementos em $y_1, \cdots, y_{2(r+h)}$ pertencem a $\overline{Y}_r$, então ao menos dois elementos são iguais e nós temos $g = 0$. Da mesma maneira, se mais de r elementos em $y_1^{(i)}, \cdots, y_{2(r+1)}^{(i)}$ pertence a $\overline{Y}_r$ para algum i, então $h_w = 0$. No caso oposto, desde que

$$St_{2k}(x_1, \cdots, x_{2k}) = \tfrac{1}{2^k} \textstyle\sum_{\sigma \in S(2k)} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \cdots [x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)}]$$

Disso, segue que $St_{2(r+n)}(y_1, \cdots, y_{2(r+n)})$ pode ser representado módulo $U_{t,r}$ como uma combinação linear de elementos da forma $c_1 \cdots c_n d$, onde $c_i = [a_i, b_i]$,

$$a_i, b_i \in \cup_{i=1}^t \overline{E}_i, \quad d \in D$$

e $St_{2(r+n)}(y_1^{(i)}, \cdots, y_{2r+1}^{(i)})$ pode ser representado como uma combinação linear de elementos da forma cd, onde $c = [a, b]$, $a, b \in \cup_{i=1}^t \overline{E}_i, d \in D$. Portanto, desde que módulo $U_{t,r}$ os elementos c_i, c estão no centro, segue que g e h_w pode ser representados módulo $U_{t,r}$ como uma combinação linear de elementos da forma $f(d_1, \cdots, d_n) d_{n+1}$, onde $d_i \in D$. Desde que $f \in T[\overline{F}_{P,0}] \subseteq T[D]$, nós temos $f(d_1, \cdots, d_n) = 0$ e, consequentemente, $g, h_w \in U_{t,r}$. ■

Teorema 4.29. *Suponha $\mathcal{M}$ uma variedade não matricial, $G \otimes G \notin \mathcal{M}$, e $\mathcal{V}$ é a maior variedade em $\{\mathcal{O}, \mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1\}$ contida em $\mathcal{M}$, então para algum k, nós temos*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_k \circ_{\mathcal{M}} \mathcal{V},$$

onde $\mathcal{M}_k \cap \mathcal{N}_k$.

Demonstração. Pela Proposição 4.27, a álgebra $\overline{F}_{P,0}$ contém um ideal nilpotente U tal que $T[\overline{F}_{P,0}/U] \supseteq \Gamma_2 + \Gamma$. Desde que $G \otimes G \notin \mathcal{M}$, nós temos $\Gamma + \Gamma_2 \neq \Gamma_2$. Aplicando a Proposição 4.25 para o T-ideal $T[\overline{F}_{p,0}/U]$, obtemos, $T[\overline{F}_{p,0}] \supseteq \Gamma_1^{\gamma}$ para algum γ. Desde que $\Gamma_1 = \{[x,y,z]\}^T$, aplicando o Lema 4.28 para o polinômio $f = [x_1,y_1,z_1]\cdots[x_j,y_j,z_j]$, que $(\Gamma_1^j T)^{\beta} \subseteq \Gamma$ para algum β, onde T é o T-ideal gerado por $\{St_{2(r+3j)}(y_1,\cdots,y_{2(r+3j)})\} \cup \Gamma$. Desde que a identidade $St_t(x_1,\cdots,x_t) = 0$ não é satisfeita por G, segue do Lema 4.9 que $T \supseteq \Gamma_0^r$ para algum r, onde $\Gamma_0 = \{[x,y]\}^T$. Dessa maneira , $\Gamma \supseteq (\Gamma_1^j T)^{\beta} \supseteq \Gamma_1^j \Gamma_0^r)^{\beta} \supseteq \Gamma_1^{\beta(j+r)}$. ■

Com isso, podemos caracterizar as variedades não matriciais que não contém $G^* \otimes G^*$, que denotaremos a partir de agora como $G \otimes G$.

Teorema 4.30. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo de característica zero. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $M_2(K) \notin \mathcal{V}$ *e* $G \otimes G \notin \mathcal{V}$.

(ii) Para algum s, $\mathcal{V}$ satisfaz a identidade

$$[[x_1,y_1],z_1]\cdots[[x_s,y_s],z_s] \equiv 0. \tag{4.17}$$

(iii) Seja $A \in \mathcal{V}$; então o ideal $A[[A,A],A]A$ é nilpotente.

(iv) Para qualquer $B \in \mathcal{V}$ e qualquer subálgebra nilpotente $A \subset B$ o ideal BAB também é nilpotente.

Demonstração. (i)⇒(ii) Como $T[\mathcal{V}_0] = \{[x,y,z]\}^T$, aplicando o Teorema 4.3, segue o resultado. (ii)⇒(iii) Seja $A \in \mathcal{V}$. Considere um produto de s elementos do ideal $A[[A,A],A]A$:

$$w = a_1[[b_1,c_1],d_1]e_1 a_2[[b_2,c_2],d_2]e_2\cdots a_s[[b_s,c_s],d_s]e_s,$$

onde $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i \in A$ para $i = 1,\cdots,s$. Usando a identidade $ab = [a,b] + ba$ onde a é um comutador triplo, moveremos os comutadores triplos para a esquerda, obtendo s comutadores triplos consecutivos em cada soma de w, obtendo $w = 0$ pela equação 4.17.

(iii)⇒(i) É sabido que $\mathrm{var}(G\otimes G) = \mathrm{var}(M_{1,1}(G))$ [8]. Vamos mostrar que $M_2(K) \notin \mathcal{V}$. Para i ímpar substituiremos $x_i = E_{12}$, $y_i = E_{22}$, $z_i = E_{22}$, então $[x_i,y_i,z_i] = E_{12}$. Para i par substituiremos $x_i = E_{21}$, $y_i = E_{11}$, $z_i = E_{11}$; então $[x_i,y_i,z_i] = E_{21}$. Então para um número arbitrário N,

$$[[x_1, y_1], z_1] \cdots [[x_N, y_N], z_N] = \begin{cases} E_{11} \neq 0, & N \text{ par;} \\ E_{12} \neq 0, & N \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{4.18}$$

Logo, $(M_2(K)[M_2(K), M_2(K), M_2(K)]M_2(K))^N \neq 0$, então $M_2(K) \notin \mathcal{V}$.

Utilizaremos uma técnica semelhante para mostrar que $G \otimes G \notin \mathcal{V}$. Para i ímpar substituiremos $x_i = E_{12}e_i$, $y_i = E_{22}$, $z_i = E_{22}$, então $[x_i, y_i, z_i] = E_{12}e_i$. Para i par substituiremos $x_i = E_{21}e_i$, $y_i = E_{11}$, $z_i = E_{11}$; então $[x_i, y_i, z_i] = E_{21}e_i$. Então para um número arbitrário N,

$$[[x_1, y_1], z_1] \cdots [[x_N, y_N], z_N] = \begin{cases} e_1 \cdots e_n E_{11} \neq 0, & N \text{ par;} \\ e_1 \cdots e_n E_{12} \neq 0, & N \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{4.19}$$

Logo, $(M_{1,1}(G)[M_{1,1}(G), M_{1,1}(G), M_{1,1}(G)]M_{1,1}(G))^N \neq 0$, então $M_{1,1}(G) \notin \mathcal{V}$, consequentemente, $G \otimes G \notin \mathcal{V}$. A partir desses resultados temos que (i), (ii), (iii) são equivalentes.

(ii)$\Rightarrow$(iv) Vamos precisar do fato que a partir da identidade $[[x_1, y_1], z_1] \cdots [[x_s, y_s], z_s] \equiv 0$ com algumas substituições equivalentes a $ab = [a, b] + ba$ chegamos na identidade $[[x_1, y_1], z_1]u_1[[x_2, y_2], z_2]u_2 \cdots u_{s-1}[[x_s, y_s], z_s] \equiv 0$.

Assumindo $A^k = 0$. Nós primeiramente consideraremos o caso $s = 1$, e posteriormente o caso geral.

Tomando $s = 1$. Assumiremos que B satisfaz a identidade $[[x, y], z] \equiv 0$, logo B satisfaz $[[x, y], z]u \equiv 0$, desenvolvendo,

$$xyzu = yxzu + zxyu - zyxu. \tag{4.20}$$

Considere

$$w = b_0a_0b_1a_1 \cdots b_{N-1}a_{N-1}b_N \in (BAB)^N, \quad (a_i \in A, b_j \in B). \tag{4.21}$$

Depois escolhemos N suficientemente grande tal que $w = 0$, o que implica que $(BAB)^N = 0$

Separando a palavra w em $[N/4]$ sub-palavras (exceto talvez a última)

$$w_t = b_{4t}a_{4t}b_{4t+1}a_{4t+1}b_{4t+2}a_{4t+2}b_{4t+3}a_{4t+3},$$

$t = 0, 1, \cdots, \lfloor N/4 \rfloor$. Para cada t fazemos a substituição:

$$x = a_{4t}, y = b_{4t+1}a_{4t+1}, z = b_{4t+2}a_{4t+2}b_{4t+3}, u = a_{4t+3}, \tag{4.22}$$

então aplicamos (4.20) obtendo no lado direito da equação uma subpalavra do tipo a_ia_j em cada um dos 3 termos. Então temos que a palavra w é uma soma de parcelas, cada uma contendo ao menos $[N/4]$ subpalavras diferentes do tipo a_ia_j. Vamos isolar uma das parcelas e reescrevê-la substituindo as subpalavras a_ia_j por a'_t e as subpalavras entre cada a'_t por b'_t, onde b'_t pode ser vazio. Como resultado obteremos parcelas do seguinte tipo:

$$b'_0a'_0b'_1a'_1\cdots b'_{N_1-1}a'_{N_1-1}b'_{N_1}$$

onde $N_1 > N/4$. Continuando o processo, após m passos cada uma das parcelas conterá sub-palavras de A^{2m}. Como $A^k = 0$, quando tivermos $2^m > k$ todas as parcelas serão nulas, o que completa o caso para $s = 1$. Para o caso geral, utilizaremos que B satisfaz a identidade que comentamos no início

$$[[x_1, y_1], z_1]u_1[[x_2, y_2], z_2]u_2\cdots u_{s-1}[[x_s, y_s], z_s]u_s \equiv 0 \tag{4.23}$$

Expandindo cada comutador triplo, obteremos 4^s monômios. Para resultarmos em uma palavra semelhante ao caso $s = 1$, reescreveremos a identidade (4.23) na forma

$$x_1, y_1, z_1u_1x_2, y_2, z_2u_2\cdots u_{s-1}x_s, y_s, z_su_s = \sum \pm m_1u_1m_2u_2\cdots m_su_s \tag{4.24}$$

onde cada $m_i \in \{x_iy_iz_i, y_ix_iz_i, z_ix_iy_i, z_iy_ix_i\}$ e para pelo menos um j, $m_j \neq x_jy_jz_j$. Logo podemos usar o mesmo argumento do caso anterior na palavra

$$w = b_0a_0b_1a_1\cdots b_{N-1}a_{N-1}b_N$$

onde, separaremos em $[N/4s]$ sub-palavras.

$$w_t = b_{4st}a_{4st}b_{4st+1}a_{4st+1}\cdots b_{4st+3}a_{4st+3}\cdots b_{4s(t+1)-4}a_{4s(t+1)-4}\cdots b_{4(st+1)-1}a_{4(st+1)-1} \tag{4.25}$$

$t = 1, \cdots, \lfloor N/4s \rfloor$. Aplicando substituições equivalentes a (4.22), observa-se que quaisquer dos $4^s - 1$ termos do lado direito da equação (4.24) contém uma subpalavra do tipo a_ia_j. Logo, a palavra w é uma soma de palavras em que cada uma contém ao menos $[N/4s]$ subpalavras diferentes do tipo a_ia_j. Vamos isolar uma das parcelas e reescrevê-la substituindo as subpalavras a_ia_j por a'_t e as subpalavras entre cada a'_t por b'_t, onde b'_t pode ser vazio. Como resultado obteremos parcelas do seguinte tipo:

$$b'_0a'_0b'_1a'_1\cdots b'_{N_1-1}a'_{N_1-1}b'_{N_1}$$

onde $N_1 > N/4(s)$. Continuando o processo, após m passos cada uma das parcelas conterá sub-palavras de A^{2m}. Como $A^k = 0$, quando tivermos $2^m > k$ todas as parcelas serão nulas, o que completa o caso geral.

(iv)$\Rightarrow$(i) Considere a álgebra $B = M_2(K)$ e $A = \langle E_{12}\rangle$; claramente A é nilpotente, mas $BAB = M_2(K)$ não é. Logo $M_2(K) \notin \mathcal{V}$. Suponha, agora, que $B = M_{1,,1}(G)$, e $A = E_{12}e_1$, uma subálgebra nilpotente. Mas para qualquer $N \in \mathbb{N}$ é possível construir um elemento não nulo de BAB como:

$$E_{12}e_1E_{12}e_2\cdots E_{12}e_{2N-1}E_{21}e_2\cdots E_{12}e_{2N-1}E_{21}e_{2N} = E_{11}e_1e_2\cdots e_{2N}.$$

$\blacksquare$

REFERÊNCIAS

[1] Aljadeff, E., Giambruno, A., Procesi, C., and Regev, A. *Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras*, vol. 66. American Mathematical Soc., 2020. Citado na página 3.

[2] Brešar, M. *Introduction to noncommutative algebra*. Springer, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 2, 5 e 8.

[3] Chekanu, G. On local finiteness in varieties of associative algebras. *Matematicheskii Sbornik 155*, 2 (1980), 217–244. Citado na página 34.

[4] Drensky, V. S. *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*. Springer Verlag, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 3, 23 e 37.

[5] Giambruno, A., and Zaicev, M. *Polynomial identities and asymptotic methods*. No. 122. American Mathematical Soc., 2005. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 23.

[6] Herstein, I. N. *Noncommutative rings*, vol. 15. American Mathematical Soc., 1994. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 5.

[7] Kemer, A. R. Nonmatrix varieties. *Algebra and Logic 19*, 3 (1980), 157–178. Citado 5 vezes nas páginas 3, 37, 38, 41 e 46.

[8] Kemer, A. R. Nonmatrix varieties. *Algebra and Logic 19*, 3 (1980), 157–178. Citado na página 48.

[9] Mishchenko, S., Petrogradsky, V., and Regev, A. Characterization of non-matrix varieties of associative algebras. *Israel Journal of Mathematics 182*, 1 (2011), 337–348. Citado 5 vezes nas páginas 2, 3, 23, 33 e 34.