



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO  
CAMPUS DIADEMA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
ESPECIALIZAÇÃO EM TEORIA DA RELATIVIDADE

Jéferson André Sales Fortunato

**Reconstrução de Teorias de Gravidade  
Modificada do tipo  $f(R, T)$  via Processos  
Gaussianos**

Diadema, São Paulo  
18 de Novembro de 2022



Jéferson André Sales Fortunato

**Reconstrução de Teorias de Gravidade Modificada do tipo**  
 **$f(R, T)$  via Processos Gaussianos**

Monografia apresentada à especialização em  
teoria da relatividade, como requisito para a  
aprovação no Trabalho de Conclusão de Curso  
do Departamento de Física da Universidade  
Federal de São Paulo

Universidade Federal de São Paulo

Campus Diadema

Departamento de Física

Especialização em Teoria da Relatividade

Orientador: Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

Diadema, São Paulo

18 de Novembro de 2022

### Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Fortunato, Jéferson André Sales

Reconstrução de teorias de gravidade modificada do tipo  $f(R,T)$  via processos gaussianos / Jéferson André Sales Fortunato. -- Diadema, 2022.

42 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Teoria da Relatividade) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2022.

Orientador: Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

1. Relatividade geral. 2. Gravidade modificada. 3.  $f(R,T)$ . 4. Processos gaussianos. 5. Cosmologia. I. Título.



*Dedico este trabalho à agricultura celeste.*



# Agradecimentos

- Primeiramente à UNIFESP pela realização deste curso de pós-graduação *latu sensu*.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro H. R. S. Moraes, pela dedicação e disponibilidade ao longo do desenvolvimento deste trabalho, como também por todos os ensinamentos e discussões de alto nível.
- A todos os professores que influenciaram diretamente meu desenvolvimento acadêmico.
- Ao meu amigo José G. L. Júnior por todo apoio durante esta especialização, por todas as ideias em conjunto, conversas, descontração e fofocas.
- Aos meus familiares por todo suporte em todos os momentos.
- À Izadora S. Vieira, amor da minha vida, pelo incentivo incondicional e inspiração diária me levando sempre mais além.
- A todos e todas que contribuíram direta ou indiretamente para a construção deste trabalho.



*“Nada como o firmamento,  
Para trazer ao pensamento  
A certeza de que estou sólido  
Em toda a área que ocupo  
E a imensidão aérea  
É ter o espaço do firmamento  
No pensamento  
E acreditar em voar algum dia  
(Chico Science)*



# Resumo

A partir da década de 90 com a descoberta de que o Universo se expande de forma acelerada, diversas tentativas com o intuito de explicar a natureza do mecanismo que causa essa aceleração foram realizadas. Até o presente momento, as observações cosmológicas reforçam a consolidação do modelo cosmológico  $\Lambda$  Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) como o mais adequado para explicar a dinâmica do Universo. Esse modelo assume um fluido de pressão negativa conhecido por constante cosmológica como causa para a expansão acelerada. No entanto, esse modelo ainda é incipiente para explicar de forma satisfatória esse mecanismo, impelindo a busca por modelos alternativos. Neste sentido, este trabalho explora uma das maneiras de abordar esse problema, ao considerar teorias de gravidade modificadas do tipo  $f(R, T)$ , onde  $R$  é o escalar de Ricci e  $T$  o traço do tensor energia momento, que permite obter soluções cosmológicas para explicar a evolução do Universo sem a necessidade de assumir uma constante cosmológica. Para isso é necessário particularizar uma função  $f(R, T)$ . Aqui fazemos o contrário, ao invés de escolher uma forma para essa função, buscamos reconstruí-la ao usar os Processos Gaussianos, uma técnica de regressão não-paramétrica, aplicados a medidas observacionais que caracterizam a evolução da expansão do Universo. Esse procedimento permite encontrar a forma analítica de  $f(R, T)$  de uma maneira independente de modelo cosmológico unicamente através de dados experimentais.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral; Gravidade Modificada;  $f(R, T)$ ; Processos Gaussianos; Cosmologia.



# Abstract

Since the 90s, with the discovery that the Universe expands at an accelerated rate, several attempts were made to explain the nature of the mechanism that drives this expansion. To date, cosmological observations reinforce the  $\Lambda$  Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) cosmological model as the most adequate to explain the dynamics of the Universe. This model assumes a negative pressure fluid known as the cosmological constant as the cause for the accelerated expansion. However, this model is not sufficient to well explain the accelerated expansion, pushing searches for alternative models. In this sense, this work explores one of the ways to approach this problem, when considering modified gravity theories like  $f(R, T)$  gravity, where  $R$  is the Ricci scalar and  $T$  the trace of the energy-momentum tensor, which allows obtain cosmological solutions to explain an evolution of the Universe without the need to assume a cosmological constant. For this it is necessary to particularize a function  $f(R, T)$ . Here we do the opposite, instead of choosing a functional form for the  $f(R, T)$  function we use Gaussian Process, a non-parametric regression technique, applied to measures that characterize an expansion of the Universe to reconstruct the  $f(R, T)$  function. This procedure allows an analytical shape of  $f(R, T)$  in a cosmological model-independent way exclusively through experimental data.

**Keywords:** General Relativity; Modified Gravity;  $f(R, T)$ ; Gaussian Process; Cosmology.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Gravitação de Einstein</b>	<b>19</b>
2.1.1	As equações de Friedmann	20
2.1.2	O modelo $\Lambda$ CDM	23
<b>3</b>	<b>TEORIAS <math>f(R, T)</math></b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Equações de campo da gravidade <math>f(R, T)</math></b>	<b>25</b>
3.1.1	Aplicação em cosmologia	26
<b>4</b>	<b>PROCESSOS GAUSSIANOS</b>	<b>28</b>
<b>4.1</b>	<b>Reconstruindo uma função</b>	<b>28</b>
<b>5</b>	<b>RECONSTRUINDO <math>f(R, T)</math> ATRAVÉS DE PROCESSOS GAUSSIANOS</b>	<b>32</b>
<b>5.1</b>	<b>Reconstrução de <math>H(z)</math></b>	<b>32</b>
<b>5.2</b>	<b>Reconstrução da função <math>f(R, T)</math></b>	<b>33</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>36</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>38</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>41</b>
	<b>APÊNDICE A – CÁLCULO DOS SÍMBOLOS DE CRISTOFFEL</b>	<b>42</b>



# 1 Introdução

De acordo com os avanços tecnológicos que permitiram a Cosmologia moderna inferir medidas com altíssima precisão, o Universo passou por dois períodos de expansão acelerada. O primeiro ocorreu logo após o Big Bang e é conhecido por Inflação Cósmica. O segundo, que começou em uma época mais recente – em termos de tempo cósmico –, após a era da matéria, é causado por uma componente desconhecida chamada de energia escura [1].

Ao longo das últimas décadas, o conjunto de medidas observacionais coletadas até então corroboram para reforçar um modelo teórico muito bem estabelecido para o Universo observável, conhecido como  $\Lambda$  Cold Dark Matter, ou  $\Lambda$ CDM. Embora seja a teoria que melhor explica os observáveis, ainda há alguns problemas que ela não consegue resolver. De acordo com esse modelo, o segundo período acelerado do Universo não pode ser explicado através da matéria ordinária sendo necessário uma componente com pressão negativa [2]. Essa componente tem como origem a energia de vácuo da Física de Partículas. Contudo, para o caso da energia escura, o valor obtido para sua densidade de energia apresenta uma grande discrepância em relação ao valor predito pela Teoria de Campos.

Para resolver esse problema, há duas principais abordagens: a primeira consiste em atribuir um campo escalar como responsável pela aceleração da expansão cósmica, geralmente modificando o tensor energia-momento nas equações da Relatividade Geral; a segunda corresponde às teorias de gravidade modificada, nas quais propõe-se alterações na Teoria Geral da Relatividade resultando em alterações no conteúdo geométrico da teoria [1].

Este trabalho tem como foco discutir a segunda perspectiva ao considerar correções em ambos os lados das equações de campo – ou seja, na parte geométrica e na fonte de matéria – através do uso de teorias  $f(R, T)$ , sendo  $R$  o *escalar de Ricci* e  $T$  o *tensor energia-momento*, mais precisamente na forma  $f(R, T) = R + 2f(T)$ , de maneira que seja possível obter modelos cosmológicos e reconstruir a função  $f(T)$  de forma não paramétrica utilizando Processos Gaussianos – método não-paramétrico para regressão não-linear.

A construção deste trabalho será fundamentada em obter as equações de campo para uma teoria de gravidade modificada centrada em uma função  $f(R, T)$ , como também obter as equações de Friedmann e da aceleração associadas. Em seguida, apresentar o método dos Processos Gaussianos e como esses algoritmos são construídos. Posteriormente aplicar a técnica às medidas observacionais do parâmetro de Hubble em termos de redshift,  $H(z)$ , inferidas através da evolução passiva de galáxias vermelhas – Cronômetros Cósmicos – e do pico das Oscilações Acústicas de Bárions para reconstruir a taxa de expansão do

Universo para redshifts baixos através da evolução de  $H(z)$ . Isso permitirá reconstruir uma família de teorias  $f(R, T)$  e compará-las com os dados observacionais e também com o atual modelo cosmológico de concordância –  $\Lambda$ CDM.

## 2 Relatividade Geral

As teorias de gravidade do tipo  $f(R, T)$ , propostas por Harko et al. [3] consistem em modificar a forma da ação gravitacional para uma função arbitrária dependente do escalar de Ricci  $R$  e do traço do tensor energia-momento  $T$ . Nesse sentido, é didaticamente interessante revisar como obter as equações de campo da Relatividade Geral propostas por Einstein, como também verificar como essas equações possibilitam propostas de modelos cosmológicos para descrever a dinâmica do Universo e em seguida fazer o mesmo para a gravidade  $f(R, T)$ .

### 2.1 Gravitação de Einstein

Uma das formas de obter as equações de campo da Gravitação de Einstein é através do princípio variacional. Seja a ação  $S$  a integral sobre o espaço-tempo de uma densidade lagrangiana, para avaliar a interação entre matéria e geometria espaço-temporal, usa-se a seguinte forma para a ação:

$$S = \frac{1}{16\pi} S_H + S_M, \quad (2.1)$$

sendo  $S_H$  a ação de Einstein-Hilbert,  $S_H = \int R\sqrt{-g} d^4x$  – onde  $R$  é o escalar de Ricci e  $g$  é o determinante do tensor métrico – e  $S_M$  é a ação da matéria,  $S_M = \int \mathcal{L}\sqrt{-g} d^4x$ , com  $\mathcal{L}$  representando sua respectiva densidade lagrangiana [4].

Ao variar a ação (2.1) com respeito ao inverso do tensor métrico, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[ \frac{1}{16\pi} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ \delta S &= \int \left[ \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{16\pi} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int \left[ \frac{1}{16\pi} \left( \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned} \quad (2.2)$$

de maneira que, pelo Princípio de Hamilton, o qual estabelece que a ação que representa evolução temporal de um sistema dinâmico não sofre alteração diante pequenas variações, ou seja a eq.(2.2) é válida para qualquer  $\delta g^{\mu\nu}$ , ontêm-se:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{16\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.3)$$

Como o lado direito da eq.(2.3) é um tensor simétrico com dimensão de densidade de energia, convencionou-se chamá-lo de tensor energia-momento, sendo [4]:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.4)$$

Em seguida, ao considerar a variação do escalar de Ricci e do determinante do tensor métrico em relação à  $g^{\mu\nu}$  como sendo respectivamente:

$$\begin{aligned}\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} &= R_{\mu\nu}; \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu},\end{aligned}$$

a eq.(2.3) torna-se:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

conhecida como equações de campo da Relatividade Geral onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein. Essa equação estabelece uma relação entre a geometria e a matéria do Universo, o lado esquerdo relaciona-se com a configuração geométrica do espaço-tempo e o lado direito com o conteúdo de matéria.

Com a descoberta de que o Universo expande-se de forma acelerada em 1998 por dois grupos de pesquisa distintos [5, 6], no cenário cosmológico introduz-se um termo nas equações de campo conhecido por *constante cosmológica* representado pela letra  $\Lambda$ . Esse termo seria a explicação mais simples para o mecanismo que dá origem a essa aceleração, amplamente chamado de *energia escura*. Com isso,  $\Lambda$  é interpretada como uma das componentes do Universo, porém, ao contrário das demais, apresentando pressão negativa. Portanto as equações de campo de Einstein são finalmente escritas como:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Embora a constante cosmológica seja uma boa candidata para explicar a expansão acelerada do Universo [2], quando comparam-se os valores para a energia quântica do vácuo obtidos por dados cosmológicos com os calculados pela física de partículas, obtém-se uma discrepância que expõe a necessidade de considerar outros modelos para a energia escura. Uma das abordagens para lidar com esse problema é considerar uma teoria de gravidade modificada para resolver o problema da constante cosmológica.

### 2.1.1 As equações de Friedmann

Para descrever o Universo em largas escalas, primeiramente, é necessário estabelecer como calcula-se a distância entre dois pontos no espaço-tempo a partir de um elemento de linha adequado. Sendo assim, usa-se a métrica de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW), adequada para descrever qualquer espaço-tempo fundamentado no princípio cosmológico, no qual considera o Universo como sendo espacialmente homogêneo e isotrópico – não há localização nem direção privilegiada no Cosmos [7, 8]. A métrica FLRW é escrita em coordenadas esféricas da seguinte maneira:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.7)$$

sendo  $t$  o *tempo cósmico*, que está associado ao tempo medido por um observador que vê o Universo expandindo-se uniformemente ao seu redor;  $a(t)$  é o *fator de escala*, um termo introduzido para descrever a expansão ou contração do Universo com o tempo;  $k$  é determinado pela geometria espacial do Universo, sendo  $k = 0$  para plana,  $k = 1$  para esférica e  $k = -1$  para hiperbólica – figura 1.

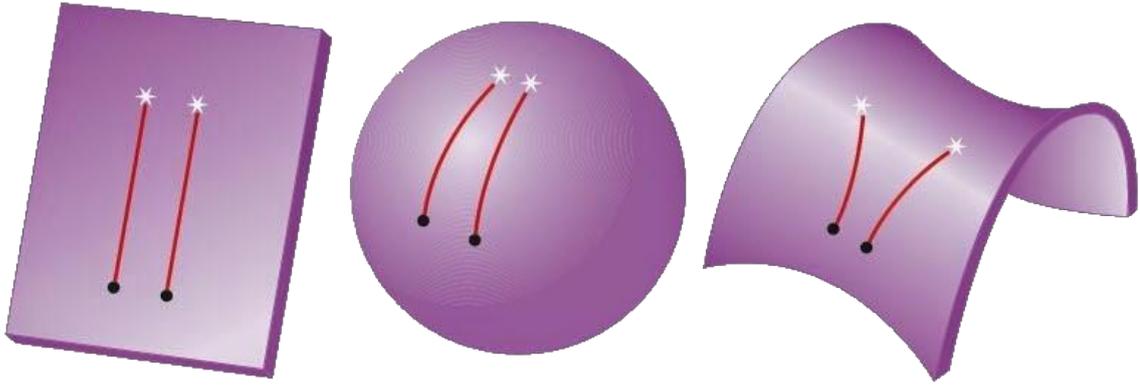


Figura 1 – Três superfícies com valores diferentes para o parâmetro de curvatura  $k$ : na primeira, onde  $k = 0$ , linhas paralelas permanecem paralelas indefinidamente; na segunda,  $k = 1$ , linhas paralelas eventualmente se encontram; por fim, na terceira,  $k = -1$ , as linhas paralelas nunca se encontram. Imagem adaptada de [9].

Ao aplicar a métrica FLRW nas equações de campo de Einstein, obtém-se as relações que caracterizam um modelo cosmológico. Da eq.(2.7), pode-se escrever explicitamente as componentes do tensor métrico:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1; \\ g_{11} &= \frac{-a^2}{(1 - r^2k)}; \\ g_{22} &= -a^2r^2; \\ g_{33} &= -a^2r^2\text{sen}^2\theta. \end{aligned} \tag{2.8}$$

A partir das componentes acima, é possível calcular os *símbolos de Cristoffel*<sup>a</sup> e consequentemente obter as componentes não-nulas do *tensor de Ricci*,

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}; \\ R_{ij} &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{ij}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

sendo  $i, j = 1, 2, 3$ . Dado que o escalar de Ricci é a segunda contração do *tensor de*

<sup>a</sup> Conferir apêndice A

*Riemann*, tem-se:

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\ &= -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Com isso, escreve-se as componentes temporal e espacial do tensor de Einstein como sendo:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right); \\ G_{ij} &= \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) g_{ij}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A escolha da métrica implica em algumas restrições para a forma do tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  [8]:

- Dado que a métrica é isotrópica, o fluido descrito pelo tensor energia-momento não pode violar a isotropia;
- Como a parte espacial do tensor de Einstein é proporcional à métrica,  $T_{ij}$  também deve ser;
- O tensor energia-momento deve ter dependência temporal assim como  $G_{\mu\nu}$ .

Sendo assim, nesse trabalho considera-se o Universo comporta-se como um fluido perfeito, dessa forma o tensor energia-momento é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

sendo  $\rho$  e  $p$  são respectivamente a densidade de energia e pressão totais, e a *quadrivelocidade*  $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$  satisfaz as seguintes condições  $u_\mu u^\mu = 1$  e  $u^\mu \nabla_\nu u_\mu = 0$ , sendo  $\nabla_\nu$  a derivada covariante definida como  $\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha$ . Usando a definição do tensor energia-momento juntamente com as componentes do tensor de Einstein é possível escrever as equações de Friedmann e da aceleração respectivamente:

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{3k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}; \quad (2.13)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.14)$$

de maneira que tanto a pressão quanto a densidade de energia totais podem ser decompostas em termos das respectivas componentes consideradas no modelo cosmológico. A primeira equação, descreve a taxa de expansão do fator de escala, em função da densidade de energia, através do *parâmetro de Hubble*  $H$ . Enquanto que, a segunda equação caracteriza a taxa de aceleração do fator de escala em função da densidade de energia e pressão totais do Universo.

### 2.1.2 O modelo $\Lambda$ CDM

O modelo cosmológico mais bem sucedido até o momento em explicar os dados observacionais cosmológicos é conhecido por  $\Lambda$ CDM – sigla para  $\Lambda$  Cold Dark Matter. Para esse modelo, o Universo é composto de:

- **Matéria bariônica:** Em essência matéria não-relativística, consiste no ingrediente necessário para a formação de planetas, estrelas, galáxias e nuvens de gás. A pressão dessa componente é desconsiderada,  $p = 0$ , e sua densidade de energia decai de acordo com a seguinte relação:  $\rho \propto a^{-3}$  [6, 10];
- **Matéria escura:** A pressão desta componente também é desconsiderada e sua densidade de energia evolui de forma similar a da matéria bariônica. Uma de suas propriedades é a capacidade de aglomerar estruturas e explicar diversas observações astrofísicas, como a distribuição de matéria em largas escalas. Uma das várias candidatas a partículas que compõe a matéria escura são as *partículas massivas de interação fraca* – termo traduzido da sigla em inglês *WIMPs* –, pois interagem com as componentes restantes apenas gravitacionalmente [11, 10];
- **Radiação:** Usada para descrever fótons e outras partículas relativísticas. Nesse caso, considera-se sua pressão como sendo  $p = \rho/3$  e sua densidade de energia decai com  $\rho \propto a^{-4}$  [7, 6];
- **Constante cosmológica:** A evidência observacional de que o Universo se expande de forma acelerada pode indicar a presença de uma constante cosmológica com pressão negativa,  $p = -\rho$ . Essa é a descrição mais simples para o mecanismo causador dessa aceleração: a energia escura. [7, 6].

Ao definir o *parâmetro adimensional de densidade* [6, 11]:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}, \quad (2.15)$$

sendo  $\rho_{crit} \equiv 3H^2/8\pi$  a densidade de energia necessária para caracterizar o Universo espacialmente plano, pode-se escrever a equação de Friedmann para o modelo  $\Lambda$ CDM em termos do redshift  $z$  – uma medida de distância muito usada na cosmologia, associada ao desvio para o vermelho sofrido pela radiação eletromagnética por conta da expansão cósmica:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right], \quad (2.16)$$

onde  $\Omega_{r0}$  representa o parâmetro adimensional de densidade relacionado à radiação,  $\Omega_{m0}$  corresponde ao parâmetro adimensional de densidade total de matéria – bárions e matéria escura –,  $\Omega_{k0}$  o parâmetro adimensional de densidade de curvatura do Universo e  $\Omega_\Lambda$  está

associado a energia escura. O subíndice 0 indica que são os valores medidos no tempo presente para os parâmetros.

Ao usar os dados mais recentes para os parâmetros cosmológicos da sonda Planck [12], um experimento espacial usado para estudar o Universo primordial,  $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km/s/Mpc}$ ,  $\Omega_{m0} = 0,315 \pm 0,007$  e  $\Omega_\Lambda = 0,68 \pm 0,9$  para plotar o parâmetro de Hubble em função do redshift através da equação 2.16 – figura 2 –, é possível perceber que a evolução de  $H(z)$  está de acordo com as medidas observacionais para o parâmetro de Hubble. Essas medidas são provenientes de dois métodos distintos que serão abordados em um capítulo posterior.

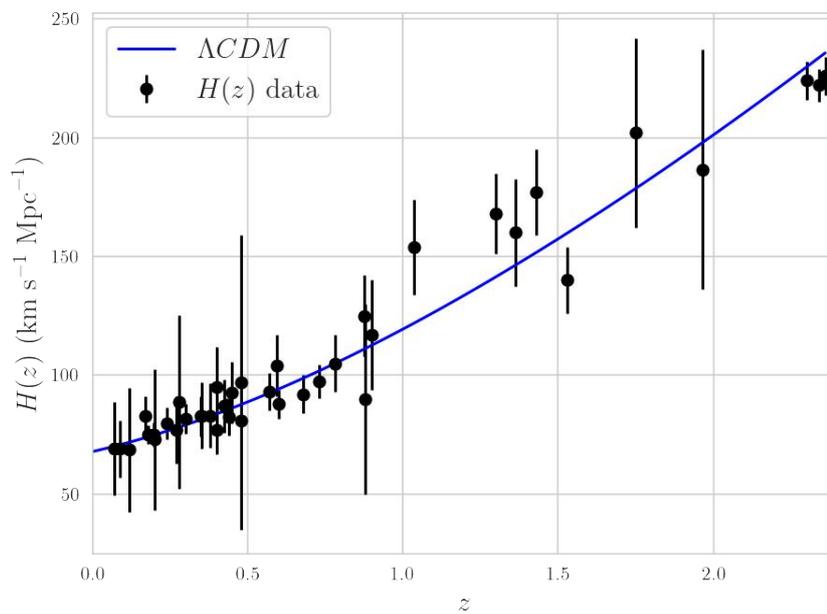


Figura 2 – Evolução de  $H(z)$  a partir do modelo  $\Lambda\text{CDM}$ .

### 3 Teorias $f(R, T)$

#### 3.1 Equações de campo da gravidade $f(R, T)$

Ao considerar teorias de gravidade modificadas é necessário reescrever a ação de Einstein-Hilbert, nesse trabalho, adota-se a seguinte forma [3]:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int f(R, T) \sqrt{-g} d^4x + \int L_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.1)$$

onde  $f(R, T)$  é uma função arbitrária do escalar de Ricci  $R$  e do traço do tensor energia momento  $T$ , dado por:  $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ . Variando a ação (3.1) em relação ao inverso do tensor métrico, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi} \int \left[ f_R(R, T) \delta R + f_T(R, T) \frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R, T) \delta g^{\mu\nu} + 16\pi \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $f_R = \partial f(R, T) / \partial R$  e  $f_T = \partial f(R, T) / \partial T$ .

Seja a variação do escalar de Ricci dada por

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

a equação (3.2) torna-se:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi} \int \left[ f_R(R, T) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f_R(R, T) g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad - f_R(R, T) \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + f_T(R, T) \frac{\delta(g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R, T) \delta g^{\mu\nu} + 16\pi \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em seguida, define-se a variação do tensor energia momento com respeito ao inverso do tensor métrico como:

$$\frac{\delta(g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

onde,

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.6)$$

Ao integrar a eq.(3.4), obtem-se as equações de campo da teoria  $f(R, T)$ :

$$f_R(R, T) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R, T) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R(R, T) = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

$$- f_T(R, T) T_{\mu\nu} - f_T(R, T) \Theta_{\mu\nu}.$$

Para calcular o tensor  $\Theta_{\mu\nu}$ , primeiro é necessário variar o tensor energia-momento,

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m + g_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}} \\ &= \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dada a seguinte condição  $g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta$ , tem-se:

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = -g_{\alpha\sigma} g_{\beta\gamma} \delta_{\mu\nu}^{\sigma\gamma}, \quad (3.9)$$

sendo  $\delta_{\mu\nu}^{\sigma\gamma} = \delta g^{\sigma\gamma} / \delta g^{\mu\nu}$  o *delta de Kronecker generalizado*. Isso resulta em:

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}. \quad (3.10)$$

Neste trabalho considera-se o Universo comporta-se como um fluido perfeito, dessa forma o tensor energia-momento é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

sendo a lagrangiana da matéria  $\mathcal{L} = -p$ . Tem-se que a quadrivelocidade  $u_\mu$  satisfaz as seguintes condições  $u_\mu u^\mu = 1$  e  $u^\mu \nabla_\nu u_\mu = 0$ . Portanto pode-se escrever o tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  como:

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} - p g_{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

### 3.1.1 Aplicação em cosmologia

Um dos casos mais simples que se pode extrair soluções cosmológicas ao particuliarizar a função  $f(R, T)$  é assumindo que a mesma possui a seguinte forma [3, 13]:

$$f(R, T) = R + 2f(T), \quad (3.13)$$

sendo  $f(T)$  uma função arbitrária do traço do tensor energia-momento. Ao considerar que o Universo é caracterizado por um fluido perfeito,  $\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} - p g_{\mu\nu}$ , e composto apenas por matéria,  $p = 0$ , as equações de campo (3.7) tornam-se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + 2f_T T_{\mu\nu} + f(T) g_{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Para esse modelo, as equações de Friedmann e de aceleração podem ser escritas como:

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{2f_T}{3}\rho - \frac{f(T)}{3}; \quad (3.15)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}\rho - \frac{1}{3}[f_T\rho + f(T)]. \quad (3.16)$$

Essas equações serão fundamentais para a aplicação do método dos Processos Gaussianos. Ao particularizar a função  $f(T)$  para um Universo contendo apenas matéria [3],  $p = 0$ ,  $T = -\rho$ , ou seja,  $f(T) = 2T$ , essa teoria torna-se equivalente a um modelo cosmológico com uma constante cosmológica efetiva proporcional ao parâmetro de Hubble,  $\Lambda_{ef} \propto H^2$ .

# 4 Processos Gaussianos

Os Processos Gaussianos (PG) podem ser usados como uma técnica de regressão não-linear para reconstruir uma função através da relação entre os dados observacionais sem a necessidade de assumir uma parametrização para o modelo. Os PG podem ser interpretados como uma coleção de variáveis aleatórias as quais associam-se a uma distribuição gaussiana para cada conjunto finito [14, 15, 16]. Em linhas gerais, dado um conjunto de dados observacionais  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{D} = \{(x_i, y_i) | i = 1, \dots, n\}, \quad (4.1)$$

deseja-se reconstruir uma função  $f(x)$  que descreva os dados. Os conjuntos de dados observacionais e os pontos nos quais a função deverá ser reconstruída serão representados por  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}^*$ , respectivamente.

## 4.1 Reconstruindo uma função

Um Processo Gaussiano pode ser considerado como uma generalização de uma distribuição gaussiana. Ao mesmo tempo que uma distribuição gaussiana está relacionada com a distribuição de uma variável aleatória, um PG descreve uma distribuição sobre funções de maneira que é completamente especificado através de suas funções média e de covariância. Seja uma função  $f$  reconstruída via Processos Gaussianos. O valor de  $f$  quando computado em um ponto  $x$  é uma variável aleatória com média  $\mu(x)$  e variância  $\text{Var}(x)$ . O valor da função em  $x$  depende do valor da mesma função avaliada em  $\tilde{x}$ , especialmente quando esses pontos são próximos entre si. Além disso, são relacionados através de uma função de covariância  $\text{cov}(f(x), f(\tilde{x})) = k(x, \tilde{x})$ , também chamada no contexto computacional de função núcleo – ou *kernel*. Assim, a distribuição de funções é dada através das seguintes equações [14, 16]:

$$\mu(x) = \mathbb{E}[f(x)], \quad (4.2)$$

$$k(x, \tilde{x}) = \mathbb{E}[(f(x) - \mu(x))(f(\tilde{x}) - \mu(\tilde{x}))], \quad (4.3)$$

$$\text{Var}(x) = k(x, x), \quad (4.4)$$

sendo o Processo Gaussiano dado por:

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(\mu(x), k(x, \tilde{x})). \quad (4.5)$$

Geralmente ao lidar com problemas de regressão [15], é necessário aproximar a função não-linear, que representa o conjunto de dados observacionais e os pontos nos quais

foram medidos – por exemplo, o parâmetro de Hubble  $H(z)$  em determinado redshift  $z$  –, com um conjunto de funções de base, que possuem parâmetros que são otimizados durante a regressão. A função núcleo é derivada a partir dessas funções de base. Há muitos tipos variados de função núcleo usadas por diferentes tipos de abordagens computacionais, mas durante este trabalho o foco será na função de covariância *exponencial quadrada*, ou *squared exponential*:

$$k(x, \tilde{x}) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x})^2}{2\ell^2}\right). \quad (4.6)$$

Nota-se que a função núcleo exponencial quadrada é uma covariância entre os dados de saída escrita em termos dos dados de entrada – por exemplo os observacionais. A covariância aproxima-se de 1 quando as variáveis nas quais os dados de entrada são muito próximos e diminui quando essa distância aumenta. Outra característica é a de que essa função núcleo é indefinidamente diferenciável, sendo de grande utilidade ao reconstruir derivadas de uma função. Os parâmetros  $\sigma_f$  e  $\ell$  são chamados de *hiperparâmetros* e caracterizam a gaussianidade da função núcleo. Enquanto o primeiro pode ser visto como a distância que se deve percorrer no eixo  $x$  para computar uma mudança significativa em  $f(x)$ , o segundo representa uma mudança no eixo  $y$  [14, 16].

A matriz de covariância  $K(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  associada a um conjunto de dados de entrada  $\mathbf{X} = \{x_i\}$  tem a seguinte forma:  $[K(\mathbf{X}, \mathbf{X})]_{ij} = k(x_i, x_j)$ . Pode-se usar Processos Gaussianos para reconstruir uma função aleatória  $f(x)$  mesmo sem nenhum dado observacional, ou seja, gerar um vetor  $\mathbf{f}^*$  a partir dos valores da função em  $\mathbf{X}^*$  com  $f_i^* = f(x_i^*)$ :

$$\mathbf{f}^* \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}^*, K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*)) , \quad (4.7)$$

sendo  $\boldsymbol{\mu}^*$  a média de  $\mathbf{f}^*$  *a priori* e  $\mathcal{N}$  representa o Processo Gaussiano avaliado em um ponto específico  $x^*$ , onde  $f(x^*)$  é uma variável aleatória obtida de uma distribuição normal. Dada a arbitrariedade da função reconstruída, uma vez que não há dados observacionais, o valor da função para diferentes pontos  $x^*$  depende apenas da função núcleo. Os dados de saída – ou resultados – só serão restringidos após a inclusão de dados observacionais no PG [16].

Para representar os dados observacionais  $(x_i, y_i)$  via Processos Gaussianos [16], é necessário assumir que os erros dessas medidas são gaussianos de maneira que elas estejam distribuídas em torno da função que as representa, ou seja,  $y_i = f(x_i) + \epsilon_i$ , onde  $\epsilon_i$  representa a dispersão das medidas com variância  $\sigma_i^2$ . Essa variância deve ser adicionada a matriz de covariância:

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C) , \quad (4.8)$$

onde  $C$  é a matriz de covariância dos dados. No caso de os dados não terem correlação, usa-se  $C = \text{diag}(\sigma_i^2)$ . Os dois Processos Gaussianos  $\mathbf{f}^*$  e  $\mathbf{y}$  podem ser representados através

de uma distribuição conjunta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}^* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C & K(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) \\ K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}) & K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*) \end{bmatrix} \right). \quad (4.9)$$

Com o objetivo de reconstruir  $\mathbf{f}^*$  a partir de  $\mathbf{y}$ , que é obtido através dos dados observacionais, deve-se usar a seguinte distribuição condicional [14, 16]:

$$\mathbf{f}^* | \mathbf{X}^*, \mathbf{X}, \mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{f}}^*, \text{cov}(\mathbf{f}^*)) , \quad (4.10)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{f}}^* = \boldsymbol{\mu}^* + K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}) [K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C]^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \quad (4.11)$$

e

$$\text{cov}(\mathbf{f}^*) = K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*) - K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}) [K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C]^{-1} K(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) \quad (4.12)$$

a média e a covariância de  $\mathbf{f}^*$ . A variância de  $\mathbf{f}^*$  é dada pela diagonal de  $\text{cov}(\mathbf{f}^*)$ . A eq.(4.10) é a distribuição posterior da função reconstruída a partir dos dados observacionais e da distribuição a priori fornecida pela eq.(4.7).

O último passo para reconstruir a função através dos Processos Gaussianos é computar os valores dos hiperparâmetros  $\sigma_f$  e  $\ell$  [16]. Eles são obtidos a partir da maximização da função de *verossimilhança* marginalizada  $\mathcal{L}$  – a probabilidade de se obter os dados observacionais independentemente de modelo teórico ser o mais adequado. Marginaliza-se sobre os valores  $\mathbf{f}$  nos pontos  $\mathbf{X}$ :

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \sigma_f, \ell) = \int p(\mathbf{y} | \mathbf{f}, \mathbf{X}) p(\mathbf{f} | \mathbf{X}, \sigma_f, \ell) d\mathbf{f} . \quad (4.13)$$

Ao supor uma distribuição a priori gaussiana  $\mathbf{f} | \mathbf{X}, \sigma_f, \ell \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, K(\mathbf{X}, \mathbf{X}))$  e considerado para os dados observacionais  $\mathbf{y} | \mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\mathbf{f}, C)$ , a eq.(4.13) resulta em [16]:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L} &= \ln p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \sigma_f, \ell) \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T [K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C]^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln |K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C| - \frac{n}{2} \ln 2\pi . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Com isso, os hiperparâmetros podem ser otimizados através da eq.(4.14). Seikel et al. em [16] resumiram em alguns passos o procedimento para reconstruir uma função via Processos Gaussianos da seguinte maneira:

- Escolher o conjunto de dados adequados;
- Escolher a função núcleo;
- Definir os pontos  $x_i^*$  nos quais a função  $f_i^*$  deverá ser reconstruída;

- Escolher uma função média a priori  $\mu(x)$ . Onde  $\mu = \text{constante}$ , é uma escolha conservadora;
- Treinar os hiperparâmetros:
  - Definir valores iniciais para os hiperparâmetros. É recomendado tentar vários valores iniciais para evitar que a otimização fique presa em algum máximo local;
  - Maximizar a função de verossimilhança, eq.(4.14), para os hiperparâmetros;
- Calcular  $\overline{\mathbf{f}^*}$  a partir da eq.(4.11, tendo com resultado o valor esperado para a função;
- Para obter a variância  $\mathbf{f}^*$ , computar os elementos diagonais  $\text{cov}(\mathbf{f}^*)$  através da eq.(4.12).

# 5 Reconstruindo $f(R, T)$ através de Processos Gaussianos

Nesta seção, como uma aplicação do método discorrido até então, aplicamos os Processos Gaussianos a 41 medidas observacionais do parâmetro de Hubble para reconstruir a taxa de expansão do Universo para baixos redshifts. Isso permitirá, a partir da equação de Friedmann, reconstruir uma família de funções  $f(R, T)$  e compará-las com o atual modelo cosmológico de concordância –  $\Lambda$  Cold Dark Matter.

## 5.1 Reconstrução de $H(z)$

Para realizarmos a reconstrução da função  $H(z)$ , consideramos o seguinte conjunto de dados compilado por [17]: 41 medidas de  $H(z)$  – tabela 1 – inferidas a partir de dois métodos distintos: o método dos *Cronômetros Cósmicos*, que se baseia na medida da diferença de idades entre pares de antigas galáxias espirais, que se formaram em épocas e redshifts semelhantes; o método fundamentado na posição do pico das *Oscilações Acústicas de Bárions*, que fornece uma régua padrão na direção radial ao medir aglomerados de galáxias [11, 18, 19]. Assim, aplicamos os dados observacionais ao algoritmo escrito em Python disponível publicamente por Seikel et al. [16], sendo possível reconstruir  $H(z)$  e suas respectivas zonas de confiança estatística em  $1\sigma$  e  $2\sigma$  – figura 3.

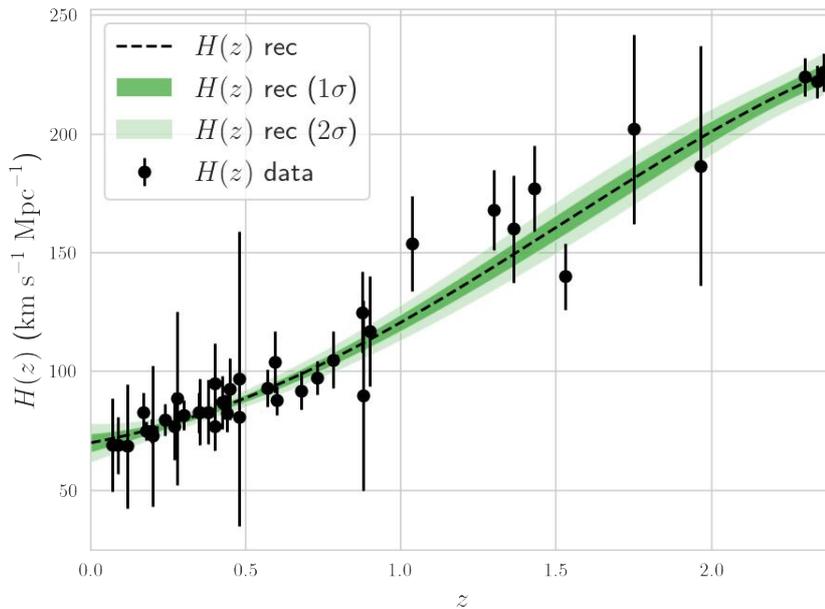


Figura 3 – Resultado da reconstrução via Processos Gaussianos de  $H(z)$  juntamente com suas zonas de confiança estatística.

$z$	$H(z)$	$\sigma_H$	Referência	$z$	$H(z)$	$\sigma_H$	Referência
0.070	69	19.6	[20]	0.480	97	62	[28]
0.090	69	12	[21]	0.570	92.900	7.855	[29]
0.120	68.6	26.2	[20]	0.593	104	13	[22]
0.170	83	8	[21]	0.6	87.9	6.1	[27]
0.179	75	4	[22]	0.680	92	8	[22]
0.199	75	5	[22]	0.73	97.3	7.0	[27]
0.200	72.9	29.6	[20]	0.781	105	12	[22]
0.240	79.69	6.65	[23]	0.875	125	17	[22]
0.270	77	14	[21]	0.880	90	40	[28]
0.280	88.8	36.6	[20]	0.900	117	23	[21]
0.300	81.7	6.22	[24]	1.037	154	20	[22]
0.350	82.7	8.4	[25]	1.300	168	17	[21]
0.352	83	14	[22]	1.363	160	22.6	[30]
0.3802	83	13.5	[26]	1.430	177	18	[21]
0.400	95	17	[21]	1.530	140	14	[21]
0.4004	77	10.2	[26]	1.750	202	40	[21]
0.4247	87.1	11.2	[26]	1.965	186.5	50.4	[30]
0.430	86.45	3.68	[23]	2.300	224	8	[31]
0.440	82.6	7.8	[27]	2.34	222	7	[32]
0.4497	92.8	12.9	[26]	2.36	226	8	[33]
0.4783	80.9	9	[26]				

Tabela 1 – 41 medidas de  $H(z)$  usadas para a reconstrução da  $f(R, T)$ .

## 5.2 Reconstrução da função $f(R, T)$

A fim de reconstruir a função  $f(R, T) = R + 2f(T)$ , seguimos um procedimento similar ao que os autores em [34] realizaram para o caso da *gravidade teleparalela*. Uma vez que a dinâmica da  $f(T)$  é dada pela equação de Friedman via eq.(3.16), ao escrever todas as quantidades envolvidas em termos de redshift, é possível usar a reconstrução de  $H(z)$  para obter a curva desejada. Para pequenas diferenças de redshift  $\Delta z$ , pode-se usar a seguinte aproximação:

$$f_T \equiv \frac{df(T)}{dT} = \frac{df/dz}{dT/dz} = \frac{f'}{T'}, \quad (5.1)$$

sendo  $T' = -(9H_0^2\Omega_{m0}/8\pi)(1+z)^2$ . Em seguida, assume-se que  $f'$  é dado por:

$$f'(z) \approx \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (5.2)$$

de maneira que é possível relacionar os valores de  $f$  em  $z_{i+1}$  e  $z_i$ . Ao aplicar essa relação na equação de Friedman, obtém-se:

$$f(z_{i+1}) = f(z_i) - \frac{9}{2} \frac{(z_{i+1} - z_i)}{(1 + z_i)} \left[ H^2 - H_0^2 \Omega_{m0} (1 + z_i)^3 + \frac{f(T)}{3} \right]. \quad (5.3)$$

Ao aplicar os Processos Gaussianos, nota-se que é necessário impor uma condição inicial para resolver a relação de recorrência acima. Sendo assim, computamos a equação de Friedmann para  $z = 0$  impondo que  $f_T \approx 0$ , então:

$$f(z = 0) = 3H_0^2 (\Omega_{m0} - 1), \quad (5.4)$$

sendo  $\Omega_{m0} = 0.315 \pm 0,007$ . Com isso, dada a relação entre  $T$  e  $H(z)$  é possível reconstruir a função  $f(T)$  e conseqüentemente a função  $f(R, T)$ . Os resultados são mostrados na figura 4 onde são plotadas as regiões de confiança estatística.

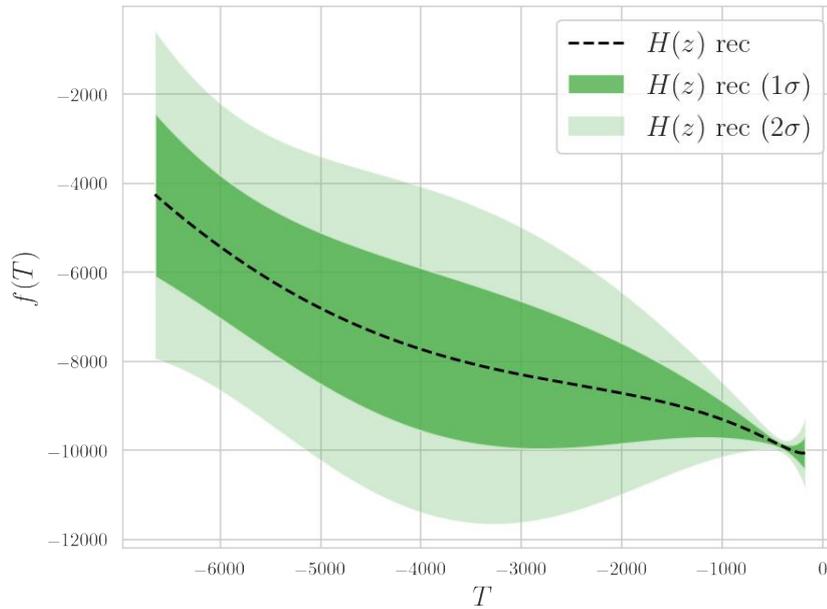


Figura 4 – Reconstrução da função  $f(T)$  através de Processos Gaussianos. As áreas preenchidas de verde representam as zonas de confiança estatística.

No intuito de descrever a função  $f(T)$  reconstruída de maneira mais acurada é possível encontrar uma forma analítica para ela através de ajustes polinomiais. Para o presente caso, escolhemos um polinômio de segunda ordem:

$$f(T) = \alpha T^2 + \beta T + \gamma, \quad (5.5)$$

sendo os valores ajustados para os parâmetros dados por:  $\alpha = -0.0003$ ,  $\beta = -1.25002$  e  $\gamma = -10328.4$ . O curva ajustada analiticamente junto com sua versão reconstruída via PG são plotadas na figura 5.

Pode-se realizar mais um teste para verificar se a curva reconstruída é viável para explicar os dados observacionais. Basta inserir a curva  $f(T)$  analítica na equação de Friedmann para obter a evolução de  $H(z)$  diante dessa função. Na figura 6 plotamos o resultado de  $H(z)$  através da função analítica junto com o resultado de  $H(z)$  reconstruído via Processos Gaussianos e o ajuste oriundo do modelo  $\Lambda$ CDM. Nota-se que para redshifts maiores que 1.7 a função analítica sai das regiões de confiança estatística da função

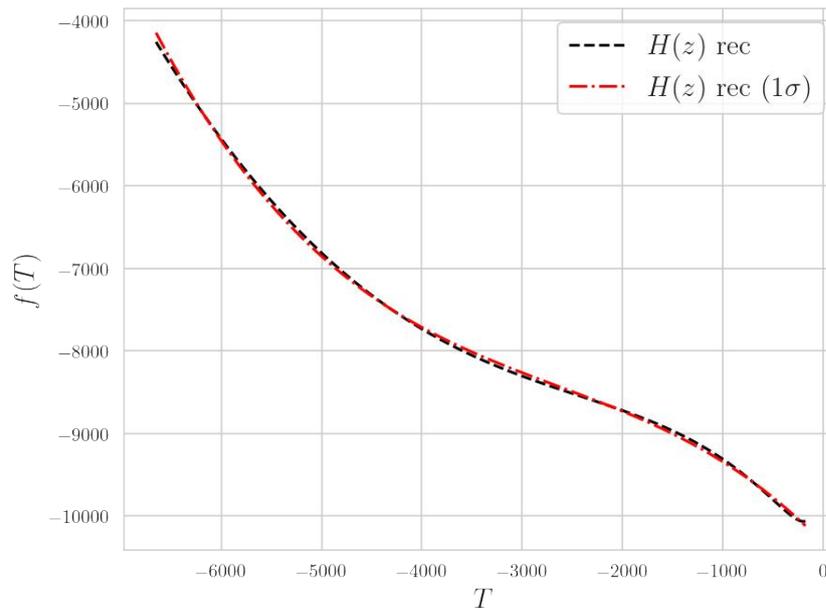


Figura 5 – Função  $f(T)$  ajustada analiticamente juntamente com sua versão reconstruída através de Processos Gaussianos.

reconstruída e difere também do modelo  $\Lambda$ CDM. Isso pode ser causada pela escassez de medidas de  $H(z)$  nessa região.

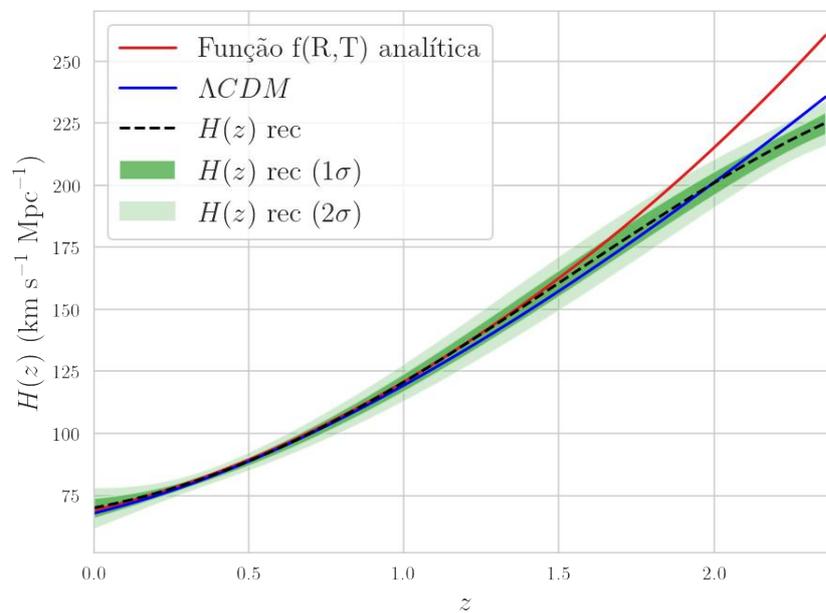


Figura 6 – Evolução de  $H(z)$ : via Processos Gaussianos, curva preta junto com suas regiões de confiança estatísticas sombreadas de verde; através da função analítica  $f(T)$ ; e ajustada pelo modelo  $\Lambda$ CDM.

## 6 Conclusões e perspectivas

Nesse Trabalho de Conclusão de Curso revisamos parte do estudo que concerne as teorias modificadas da gravitação. No primeiro capítulo, abordamos brevemente as motivações observacionais as quais impelem a busca por teorias alternativas à Gravitação de Einstein e a justificativa para tratar esse problema sob à luz de métodos não-paramétricos. No segundo capítulo, discorremos sobre o ferramental teórico que possibilita derivar as equações de campo da Relatividade Geral, como também apresentamos uma das formas de se obter equações modificadas da RG, conhecidas por teorias  $f(R, T)$ . Também foram revisados os procedimentos de obtenção das equações de Friedmann e de aceleração para ambas as teorias, assim como soluções cosmológicas a partir das mesmas.

No capítulo três realizamos uma breve discussão acerca dos Processos Gaussianos, que são uma técnica de regressão não paramétrica muito usada em diversas áreas para reconstruir a dinâmica de sistemas específicos. Mostramos como um algoritmo de PG é capaz de reconstruir uma função a partir dos dados observacionais e de uma função núcleo adequada de maneira que seja possível otimizar os hiperparâmetros e maximizar a função de verossimilhança que descreve o problema.

Por fim, no capítulo quatro apresentamos os dados observacionais que usamos nesse trabalho para reconstruir via Processos Gaussianos a evolução do parâmetro de Hubble em termos de redshift: 41 medidas de  $H(z)$  provenientes do método de Cronômetros Cósmicos e dos picos das Oscilações Acústicas de Bárions. Em seguida, apresentamos o procedimento necessário para reconstruir a função  $f(T)$  através da evolução de  $H(z)$  por meio de uma relação de recorrência. Assim, com as condições de contorno adequadas, mostramos que é possível obter uma função  $f(T)$  de forma independente de modelo. Com o intuito de aprimorar nossa descrição da função reconstruída, aplicamos um ajuste via polinômios à mesma e escolhemos um polinômio de segunda ordem para descrevê-la. Usando a função analítica, pudemos verificar que ao substituí-la na equação de Friedmann obtemos um modelo cosmológico viável frente aos dados observacionais.

Este trabalho consiste numa análise prévia dos nossos resultados, sendo assim, como perspectivas futuras: temos a possibilidade de, primeiramente, impor uma prior em  $H_0$  para verificar como isso afeta a forma da curva reconstruída; otimizar os hiperparâmetros usando *MCMC*, ou Cadeias de Markov via Monte Carlo; computar a estatística de *chi-quadrado* para implementar o *Critério de Informação Bayesiana* com a finalidade de verificar dentre todos os ajustes polinomiais testados, qual seria o mais adequado de acordo com esse critério; ampliar a discussão acerca da informação física que se pode obter das curvas reconstruídas, bem como dos parâmetros analíticos; estender nossa análise para incorporar

dados de Supernovas do tipo Ia através do conjunto *Pantheon*, que consiste no maior conjunto de dados desse observável abrangendo a faixa de redshift entre  $0 < z < 2.3$ , com mais de mil pontos, para verificar a robustez dos resultados.

# Referências

- 1 WU, J. et al. Palatini formulation of  $f(r, t)$  gravity theory, and its cosmological implications. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 5, p. 1–22, 2018.
- 2 MORAES, P.; SANTOS, J. Two scalar field cosmology from coupled one-field models. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 8, p. 083516, 2014.
- 3 HARKO, T. et al.  $f(r, t)$  gravity. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 2, p. 024020, 2011.
- 4 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- 5 AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark energy: theory and observations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- 6 LIDDLE, A. *An introduction to modern cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- 7 RYDEN, B. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.
- 8 PIATTELLA, O. *Lecture notes in cosmology*. [S.l.]: Springer, 2018.
- 9 CALDER, L. *Dark energy: how the paradigm shifted*. [S.l.], 2010 (accessed September 3, 2020). <<https://physicsworld.com/a/dark-energy-how-the-paradigm-shifted/>>.
- 10 MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005.
- 11 PADILLA, L. E. et al. Cosmological parameter inference with bayesian statistics. *Universe*, MDPI, v. 7, n. 7, p. 213, 2021.
- 12 AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results-i. overview and the cosmological legacy of planck. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 641, p. A1, 2020.
- 13 POPLAWSKI, N. J. A lagrangian description of interacting dark energy. *arXiv preprint gr-qc/0608031*, 2006.
- 14 WILLIAMS, C. K.; RASMUSSEN, C. E. *Gaussian processes for machine learning*. [S.l.]: MIT press Cambridge, MA, 2006. v. 2.
- 15 KOCIJAN, J. *Modelling and control of dynamic systems using Gaussian process models*. [S.l.]: Springer, 2016.
- 16 SEIKEL, M.; CLARKSON, C.; SMITH, M. Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using gaussian processes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2012, n. 06, p. 036, 2012.
- 17 JESUS, J. et al. Bayesian correction of  $h(z)$  data uncertainties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 477, n. 3, p. 2867–2873, 2018.
- 18 JIMENEZ, R.; LOEB, A. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 573, n. 1, p. 37, 2002.

- 19 LI, E.-K. et al. Testing the effect of  $h_0$  on  $f\sigma_8$  tension using a gaussian process method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 501, n. 3, p. 4452–4463, 2021.
- 20 ZHANG, C. et al. Four new observational  $h(z)$  data from luminous red galaxies in the sloan digital sky survey data release seven. *Research in Astronomy and Astrophysics*, IOP Publishing, v. 14, n. 10, p. 1221, 2014.
- 21 SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 12, p. 123001, 2005.
- 22 MORESCO, M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to  $z = 1.1$  from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2012, n. 08, p. 006, 2012.
- 23 GAZTANAGA, E.; CABRÉ, A.; HUI, L. Clustering of luminous red galaxies–iv. baryon acoustic peak in the line-of-sight direction and a direct measurement of  $h(z)$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, The Royal Astronomical Society, v. 399, n. 3, p. 1663–1680, 2009.
- 24 OKA, A. et al. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the sdss dr7 lrg sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 439, n. 3, p. 2515–2530, 2014.
- 25 CHUANG, C.-H.; WANG, Y. Modelling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and single-probe measurements of  $h(z)$ ,  $d_a(z)$  and  $f(z)\sigma_8(z)$  from the sloan digital sky survey dr7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 435, n. 1, p. 255–262, 2013.
- 26 MORESCO, M. et al. A 6% measurement of the hubble parameter at  $z = 0.45$ : direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2016, n. 05, p. 014, 2016.
- 27 BLAKE, C. et al. The wigglez dark energy survey: Joint measurements of the expansion and growth history at  $z < 1$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 425, n. 1, p. 405–414, 2012.
- 28 STERN, D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. i:  $H(z)$  measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2010, n. 02, p. 008, 2010.
- 29 ANDERSON, L. et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: measuring  $d_a$  and  $h$  at  $z = 0.57$  from the baryon acoustic peak in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 439, n. 1, p. 83–101, 2014.
- 30 MORESCO, M. Raising the bar: new constraints on the hubble parameter with cosmic chronometers at  $z = 2$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Oxford University Press, v. 450, n. 1, p. L16–L20, 2015.
- 31 DELUBAC, T. et al. Baryon acoustic oscillations in the  $ly\alpha$  forest of boss quasars. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 552, p. A96, 2013.

- 
- 32 DELUBAC, T. et al. Baryon acoustic oscillations in the  $\text{Ly}\alpha$  forest of boss dr11 quasars. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 574, p. A59, 2015.
- 33 FONT-RIBERA, A. et al. Quasar-lyman  $\alpha$  forest cross-correlation from boss dr11: Baryon acoustic oscillations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 05, p. 027, 2014.
- 34 BRIFFA, R. et al. Constraining teleparallel gravity through gaussian processes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 38, n. 5, p. 055007, 2021.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Cálculo dos símbolos de Cristoffel

Por simplicidade, neste apêndice usaremos  $c = 1$  e  $k = 0$ . Seja a métrica dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (\text{A.1})$$

onde,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ , então:

$$g_{00} = -1; \quad (\text{A.2})$$

$$g_{11} = a^2; \quad (\text{A.3})$$

$$g_{22} = a^2 r^2; \quad (\text{A.4})$$

$$g_{33} = a^2 \sin^2 \theta r^2. \quad (\text{A.5})$$

Calculam-se os símbolos de Christoffel não-nulos a partir de:

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (\text{A.6})$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left( \cancel{g_{01,1}}^0 + \cancel{g_{01,1}}^0 - g_{11,0} \right) \\ &= \frac{1}{2} (-1) [-\partial_0 (\alpha^2)] \\ &= \frac{1}{2} (2a\dot{a}) \\ &= a\dot{a}; \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left( \cancel{g_{02,2}}^0 + \cancel{g_{02,2}}^0 - g_{22,0} \right) \\ &= \frac{1}{2} (-1) [-\partial_0 (a^2 r^2)] \\ &= \frac{1}{2} (2a\dot{a} r^2) \\ &= a\dot{a} r^2; \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left( \cancel{g_{03,3}}^0 + \cancel{g_{03,3}}^0 - g_{33,0} \right) \\
&= \frac{1}{2}(-1) \left[ -\partial_0 \left( a^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( 2a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \right) \\
&= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta;
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left( \cancel{g_{10,1}}^0 + g_{11,0} - \cancel{g_{01,1}}^0 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( a^2 \right)^{-1} \left[ \partial_0 \left( a^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( a^{\cancel{2}} \right) \left( 2\dot{a} \right) \\
&= \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma_{10}^1;
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left( \cancel{g_{12,1}}^0 + \cancel{g_{12,1}}^0 - g_{22,1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( a^2 \right)^{-1} \left[ -\partial_r \left( a^2 r^2 \right) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left( a^{\cancel{2}} \right) \left( 2r a^{\cancel{2}} \right) \\
&= -r
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left( \cancel{g_{13,1}}^0 + \cancel{g_{13,1}}^0 - g_{33,1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( a^2 \right)^{-1} \left[ -\partial_r \left( a^2 \sin^2 \theta r^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( a^{\cancel{2}} \right)^{-1} \left( -2r a^{\cancel{2}} \sin^2 \theta \right) \\
&= -r \sin^2 \theta;
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left( \cancel{g_{20,2}}^0 + g_{22,0} - \cancel{g_{02,2}}^0 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( a^2 r^2 \right)^{-1} \left[ \partial_0 \left( a^2 r^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( a^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}} \right)^{-1} \left( 2a\dot{a}r^{\cancel{2}} \right) \\
&= \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma_{20}^2;
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left( \cancel{g_{21,2}}^0 + g_{22,1} - \cancel{g_{12,2}}^0 \right) \\
&= \frac{1}{2} (a^2 r^2)^{-1} [\partial_r (a^2 r^2)] \\
&= \frac{1}{2} (a^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}})^{-1} (2r a^{\cancel{2}}) \\
&= \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2;
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left( \cancel{g_{23,3}}^0 + \cancel{g_{23,3}}^0 - g_{33,2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (a^2 r^2)^{-1} [-\partial_\theta (a^2 \sin^2 \theta r^2)] \\
&= \frac{1}{2} (a^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}})^{-1} (-2a^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}} \sin \theta \cos \theta) \\
&= -\sin \theta \cos \theta;
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} \left( \cancel{g_{30,3}}^0 + g_{33,0} - \cancel{g_{03,3}}^0 \right) \\
&= \frac{1}{2} (a^2 r^2 \sin^2 \theta)^{-1} [\partial_0 (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] \\
&= \frac{1}{2} (a^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}} \sin^{\cancel{2}} \theta)^{-1} (2a^{\cancel{2}} \dot{a} r^{\cancel{2}} \sin^{\cancel{2}} \theta) \\
&= \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma_{30}^3;
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} (g_{31,3} + g_{33,1} - g_{13,3}) \\
&= \frac{1}{2} (a^2 r^2 \sin^2 \theta)^{-1} [\partial_r (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] \\
&= \frac{1}{2} (a^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}} \sin^{\cancel{2}} \theta)^{-1} (2r \sin^{\cancel{2}} \theta) \\
&= \frac{1}{r} = \Gamma_{31}^3;
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} \left( \cancel{g_{32,3}}^0 + g_{33,2} - \cancel{g_{23,3}}^0 \right) \\
&= \frac{1}{2} (a^2 r^2 \sin^2 \theta)^{-1} [\partial_\theta (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] \\
&= \frac{1}{2} (a^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}} \sin^{\cancel{2}} \theta)^{-1} (2a^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}} \sin \theta \cos \theta) \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= \cot \theta = \Gamma_{32}^3;
\end{aligned} \tag{A.18}$$

