



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO  
CAMPUS DIADEMA

Thaís da Silva Guerini

# **Gravidade Unimodular como um possível cenário cosmológico**

Diadema, São Paulo  
5 de novembro de 2022

Thaís da Silva Guerini

## **Gravidade Unimodular como um possível cenário cosmológico**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de Especialista em Teoria da Relatividade, ao Programa de Pós-Graduação Lato Sensu do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema

Universidade Federal de São Paulo  
Departamento de Física  
Especialização em Teoria da Relatividade

Orientador: Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

Diadema, São Paulo  
5 de novembro de 2022

### **Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)**

Guerini, Thaís da Silva

Gravidade Unimodular como um possível cenário cosmológico /  
Thaís da Silva Guerini. -- Diadema, 2022.

30 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Teoria da  
Relatividade) - Universidade Federal de São Paulo - Campus  
Diadema, 2022.

Orientador: Thaís da Silva Guerini

1. Gravidade Unimodular. 2. Problema da Constante  
Cosmológica. 3. Cosmologia. I. Título.

Thaís da Silva Guerini

## **Gravidade Unimodular como um possível cenário cosmológico**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de Especialista em Teoria da Relatividade, ao Programa de Pós-Graduação Lato Sensu do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema

Trabalho aprovado. Diadema, São Paulo, Diadema, São Paulo, 24 de novembro de 2022:

---

**Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva  
Moraes**  
Orientador

---

**Thaís da Silva Guerini**  
Aluna

---

**Professor**  
Convidado 1

---

**Professor**  
Convidado 2

Diadema, São Paulo  
5 de novembro de 2022

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, que possibilitou que eu trilhasse esse caminho. À minha mãe, Dirceléa, por todo o carinho, apoio, incentivo e dedicação voltados à minha formação acadêmica e pessoal. Ao meu pai, Lourival, por todos os investimentos financeiros que possibilitaram meu processo de aprendizagem. À minha irmã, por toda amizade, inspiração, discussões, incentivos e cuidado.

Ao meu orientador, Pedro Moraes, por me inspirar, ensinar e guiar durante esse tempo. Agradeço também aos colegas Elias Brito, Jeferson Fortunato e Junior Lima, também orientados pelo professor Pedro, por todo o auxílio e pelas discussões que auxiliaram no estudo que gerou esse trabalho.

A todos os meus amigos, pelo apoio, carinho, confiança e auxílio nos cuidados com minha saúde. Também agradeço por terem me lembrado várias vezes de minha própria capacidade, e por terem compartilhado comigo a oportunidade de cursar essa especialização.

Aos colegas que também cursaram essa pós-graduação, por toda a ajuda concedida e por todas as ricas discussões, sem as quais eu não conseguiria seguir da mesma forma.

A todos os professores da Universidade Federal de São Paulo, e a todos os demais docentes que, de alguma forma, contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal.

# Resumo

O presente estudo, que constitui um trabalho de conclusão de curso de especialização em Teoria da Relatividade, tem como objetivo solucionar o problema da constante cosmológica com uso da teoria alternativa à Relatividade Geral denominada Gravidade Unimodular.

Essa teoria, proposta por Albert Einstein em 1919, tem como característica principal a chamada condição unimodular, na qual o determinante da métrica é constante. As equações de campo obtidas tem uma importante diferença da Relatividade Geral: o tensor momentum-energia pode ou não ser conservado. Nesse panorama, estudamos as implicações da conservação ou não desse tensor, no âmbito cosmológico.

Como resultado, encontramos na literatura que ambas as situações podem solucionar o problema da constante cosmológica (ELLIS et al., 2011), (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017). Esse resultado se mostra extremamente interessante e pretendemos realizar análises quantitativas mais detalhadas a fim de determinar o cenário mais provável de acordo com observações cosmológicas e astrofísicas.

**Palavras-chaves:** Gravidade Unimodular, Problema da Constante Cosmológica, Cosmologia

# Abstract

The present study, which constitutes a final paper for a specialization course in Relativity Theory, aims to solve the cosmological constant problem based on the alternative theory to General Relativity called Unimodular Gravity.

This theory, proposed by Albert Einstein in 1919, has as its main characteristic the so-called unimodular condition, in which the determinant of the metric is constant. The resulting field equations have an important difference from General Relativity: the momentum-energy tensor may or may not be conserved. In this panorama, we study the implications of the conservation or not of this tensor, in the cosmological framework.

As a result, we found in the literature that both situations can solve the cosmological constant problem ([ELLIS et al., 2011](#)), ([JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017](#)). This is an extremely interesting result and we intend to perform more detailed quantitative analyses in order to determine the most likely scenario according to cosmological and astrophysical observations.

**Key-words:** Unimodular Gravity, Cosmological Constant Problem, Cosmology

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>9</b>
2.1	Princípios da Relatividade Geral	9
2.2	As Equações de Campo de Einstein	10
2.3	A constante cosmológica	12
<b>3</b>	<b>O MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA</b>	<b>14</b>
3.1	Lei de Hubble-Lemaître	14
3.2	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	15
3.3	Dinâmica Cósmica	16
3.4	Setor escuro	18
3.5	Radiação Cósmica de Fundo	19
3.6	Período inflacionário	22
<b>4</b>	<b>GRAVIDADE UNIMODULAR</b>	<b>25</b>
4.1	Problemas no modelo padrão	25
4.2	Gravidade Unimodular aplicada à Cosmologia	26
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>29</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>30</b>

# 1 Introdução

A Gravidade Unimodular data de 1919, proposta por Albert Einstein como teoria alternativa à Relatividade Geral (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017), e tem ganhado crescente atenção nos últimos anos. Essa teoria consiste em considerar um elemento de volume fixo no espaço-tempo, isto é, o determinante da métrica é constante. Essa condição é denominada de condição unimodular, e resulta em equações de campo modificadas com traço nulo (FABRIS et al., 2022a). As equações de campo obtidas não mais implicam a conservação do tensor momentum-energia pelas identidades de Bianchi, possibilitando os cenários conservativo e não conservativo (FABRIS et al., 2022b).

Nesse contexto, a Gravidade Unimodular se mostra uma interessante alternativa para tentar solucionar problemas relacionados à Relatividade Geral, entre eles o problema da constante cosmológica.

Esse problema compreende a diferença de aproximadamente 120 ordens de grandeza entre os valores estimado e observado da energia do vácuo, aqui equivalente à constante cosmológica  $\Lambda$  (ADLER, 2021).

A fim de estudar a possibilidade de solucionar esse problema através da Gravidade Unimodular, realizamos uma pesquisa na literatura sobre resultados recentes sobre o tema, e analisamos essa possibilidade na presença ou não da conservação do tensor momentum-energia.

## 2 Relatividade Geral

Neste capítulo trataremos de uma breve revisão da Relatividade Geral de Einstein, tratando dos pontos mais relevantes a esse trabalho.

### 2.1 Princípios da Relatividade Geral

Ao criar a Teoria da Relatividade Geral em 1915, Albert Einstein se baseou em alguns princípios fundamentais sobre a Natureza, que começaram a ser enunciados anteriormente a ele.

Em 1893, Ernst Mach, baseado na ideia de que o movimento pode ser conceituado apenas de forma relativa, propôs uma nova visão de sistemas inerciais. Para ele, as estrelas fixas determinam um sistema inercial local através de suas distribuições de massa. Isso ficou conhecido depois como *princípio de Mach*, nome dado por Einstein (D'INVERNO, 1992). Assim, as forças inerciais têm sua origem física na matéria, de forma que se houvesse apenas um corpo no Universo, ele não sofreria nenhum efeito inercial.

Do ponto de vista Machiano, em uma situação em que a distribuição de massa fosse anisotrópica, ou seja, dependente da direção, os efeitos inerciais também seriam dependentes da direção. Como não há evidências observacionais disso, poderíamos concluir que o Universo é isotrópico.

Dessa forma, o Princípio de Mach estabelece uma relação entre massa e geometria, na qual a massa determina a geometria e, na ausência da mesma, não haveria geometria (D'INVERNO, 1992).

Um outro princípio fundamental para a Relatividade Geral é o *princípio de equivalência*, amplamente abordado na literatura. De acordo com ele, as massas inerciais e gravitacionais dos corpos são iguais, isto é, a matéria responde a um campo gravitacional da mesma forma que é a fonte de um. (D'INVERNO, 1992)

Indo além, não há experimentos que possam distinguir o movimento de queda livre em uma região com campo gravitacional de um movimento uniforme com ausência de campo gravitacional. Na figura 1 temos uma ilustração do famigerado exemplo de um observador isolado em um ambiente sem comunicação com o ambiente externo. Na situação (a) ele está em um foguete acelerado verticalmente para cima, e na situação (b) ele está sob efeito gravitacional. Ao soltar um objeto, não há distinção entre as situações (a) e (b) do ponto de vista do observador.

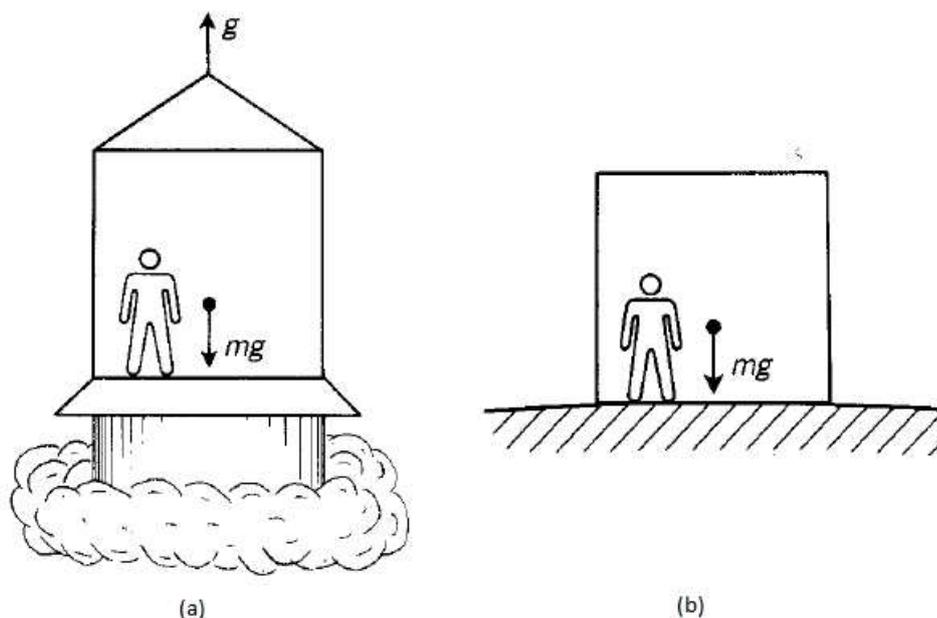


Figura 1 – Observador sem contato externo percebe o movimento de queda livre por ação de um campo gravitacional e efeito de força inercial da mesma forma. Na situação (a) o referencial é acelerado enquanto que a situação (b) ilustra o efeito de um campo gravitacional sobre um corpo. (D'INVERNO, 1992)

Considerando que todas as forças inerciais são proporcionais à massa do corpo em questão, Einstein propôs lidar com a força gravitacional também como um efeito inercial. Sendo assim, um sistema linearmente acelerado com relação a um sistema inercial é localmente idêntico a um sistema em repouso sob campo gravitacional.

Considerando a validade da Relatividade Restrita e que não há distinção entre os referenciais inerciais e acelerados, devemos ter um espaço-tempo curvo (FALCIANO, 2009).

Por fim, Einstein também propôs que todos os observadores são equivalentes, o que configura o *princípio da relatividade geral* (D'INVERNO, 1992). Já que não há um sistema de coordenadas canônico, a teoria deve ser invariante sob transformações de coordenadas, o que faz com que ela seja bem descrita através do formalismo tensorial.

## 2.2 As Equações de Campo de Einstein

Visto que a métrica desempenha função de potenciais (D'INVERNO, 1992), em analogia com a teoria Newtoniana, devemos ter equações de campo com equações diferenciais parciais de segunda ordem para a métrica. Um tensor que tem essa propriedade é o tensor de Riemann, definido como:

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\rho} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}, \quad (2.1)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica e  $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$  é a chamada conexão métrica ou símbolo de Christoffel, dado por

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_{\nu}g_{\rho\sigma} + \partial_{\sigma}g_{\rho\nu} - \partial_{\rho}g_{\nu\sigma}). \quad (2.2)$$

Sabemos que partículas livres seguem geodésicas do tipo tempo, que são a mínima distância entre dois pontos para corpos que se movem com velocidade inferior à velocidade da luz no vácuo. Para incluir o efeito da gravitação a métrica deve ser generalizada para curva. Além disso, a variação no campo gravitacional leva partículas de teste a viajarem em geodésicas que convergem ou divergem, cuja convergência é descrita pelo tensor de Riemann (D'INVERNO, 1992). É natural, portanto, que as equações de campo envolvam esse tensor e/ou o tensor de Ricci, sendo este último dado pela contração

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} = g^{\sigma\rho}R_{\rho\mu\sigma\nu}. \quad (2.3)$$

Podemos definir o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.4)$$

onde  $R$  o escalar de Ricci ou escalar de curvatura definido como

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

As equações de campo de Einstein são escritas como (D'INVERNO, 1992)

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momentum-energia e a constante de acoplamento  $\kappa$  é encontrada fazendo que no limite Newtoniano as equações devem se reduzir à equação de Poisson, levando a

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.7)$$

com  $G$  sendo a constante gravitacional universal e  $c$  a velocidade da luz no vácuo.

As equações de campo de Einstein podem ser obtidas através do princípio variacional, utilizando a ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int_{\Omega} (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_m) d\Omega, \quad (2.8)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangeana de matéria e  $\mathcal{L}_G$  é a lagrangeana de Einstein dada por

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R, \quad (2.9)$$

sendo  $g$  o determinante da métrica  $g_{\mu\nu}$  (D'INVERNO, 1992).

Considerando a definição da derivada covariante de um tensor arbitrário  $A^{\mu\nu}$

$$\nabla_{\rho} A^{\mu\nu} = \partial_{\rho} A^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} A^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} A^{\mu\sigma} \quad (2.10)$$

e aplicando-a para o tensor de Einstein, obtemos uma importante propriedade inerente às equações de campo da Relatividade Geral, que são as identidades de Bianchi contraídas:

$$\nabla_{\nu} G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.11)$$

e

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.12)$$

Essas equações mostram a conservação dos tensores de Einstein e momentum-energia, respectivamente.

O conjunto de equações descritas em 2.6 é não linear nas derivadas primeiras (RINDLER, 2006), sendo de difícil resolução, de forma geral. Analisando-as de um ponto de vista Machiano lemos as equações da direita pra esquerda, observando que dado uma distribuição de matéria podemos determinar a geometria. Quando essas equações são lidas da esquerda para a direita, estaríamos interessados em descrever o conteúdo material com base na métrica  $g_{\mu\nu}$ . Contudo isso se aplica pouco na prática pois pode levar a tensores de momentum-energia não físicos. Por fim, as equações podem ser lidas como um conjunto de dez equações conectando vinte quantidades: 10 componentes de  $g_{\mu\nu}$  e 10 componente de  $T_{\mu\nu}$ . Assim, temos vínculos sobre escolhas simultâneas de matéria e geometria.

## 2.3 A constante cosmológica

Einstein considerou que as equações 2.6 eram deficientes, pois violariam o princípio de Mach para o vácuo. Isso porque uma partícula de teste na ausência de matéria experienciaria efeitos inerciais apesar de não haver matéria que causasse esses efeitos (D'INVERNO, 1992).

A fim de resolver esse problema, Einstein recorreu à Cosmologia, buscando soluções para um universo estático e finito preenchido por matéria de forma homogênea, modelo aceito na época (D'INVERNO, 1992). Fazendo isso, se viu forçado a introduzir um novo termo associado à chamada constante cosmológica  $\Lambda$ , de forma que as equações 2.6 se tornam

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Visto que

$$\nabla_{\nu} g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.14)$$

o resultado de conservação do tensor momentum-energia dado por 2.12 não é alterado.

A lagrangeana correspondente que leva a tal resultado é

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m. \quad (2.15)$$

As equações 2.13 correspondem ao princípio de Mach no sentido de não levar a geometria plana como solução. Entretanto, evidências de expansão do Universo levaram Einstein a se arrepender de ter introduzido a constante cosmológica em suas equações. Atualmente, o modelo padrão da Cosmologia inclui a constante cosmológica, como veremos a seguir.

## 3 O modelo padrão da Cosmologia

A Cosmologia moderna se consolidou após o desenvolvimento da Relatividade Geral. O Modelo Padrão, modelo que mais está em concordância com as observações atuais, é o Modelo  $\Lambda$ CDM, que se baseia em duas grandes hipóteses (WEINBERG, 1972):

- A Relatividade Geral de Einstein descreve o campo gravitacional;
- O Universo pode ser considerado homogêneo e isotrópico em escalas superiores a 100 Mpc, hipótese denominada Princípio Cosmológico.

### 3.1 Lei de Hubble-Lemaître

Em 1927 e 1929 George Lemaître (LEMAÎTRE, 1933) e Edwin Hubble (HUBBLE, 1929), respectivamente, notaram que as galáxias se afastam umas das outras ao observar seus espectros. Esse afastamento é proporcional à distância entre elas  $r$  e pode ser escrito como

$$v = H(t)r, \quad (3.1)$$

sendo  $H(t)$  conhecido como *parâmetro de Hubble*, e  $v$  a velocidade de receção.

A equação 3.1 é a chamada *lei de Hubble-Lemaître*. No momento presente o parâmetro de Hubble é chamado de *constante de Hubble* e denotado por  $H(t_0) = H_0$ .

Podemos definir o *redshift* ou desvio para o vermelho, como

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (3.2)$$

onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda observado e  $\lambda_e$  o comprimento de onda emitido pela fonte de luz.

A partir de dados observacionais e de um ajuste linear Hubble obteve

$$cz = H_0 r, \quad (3.3)$$

sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Essa expressão é o limite da lei de Hubble-Lemaître, válida apenas para  $z \ll 1$ . A figura 2 indica a relação obtida pelo estudioso.

O parâmetro de Hubble pode ser definido como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.4)$$

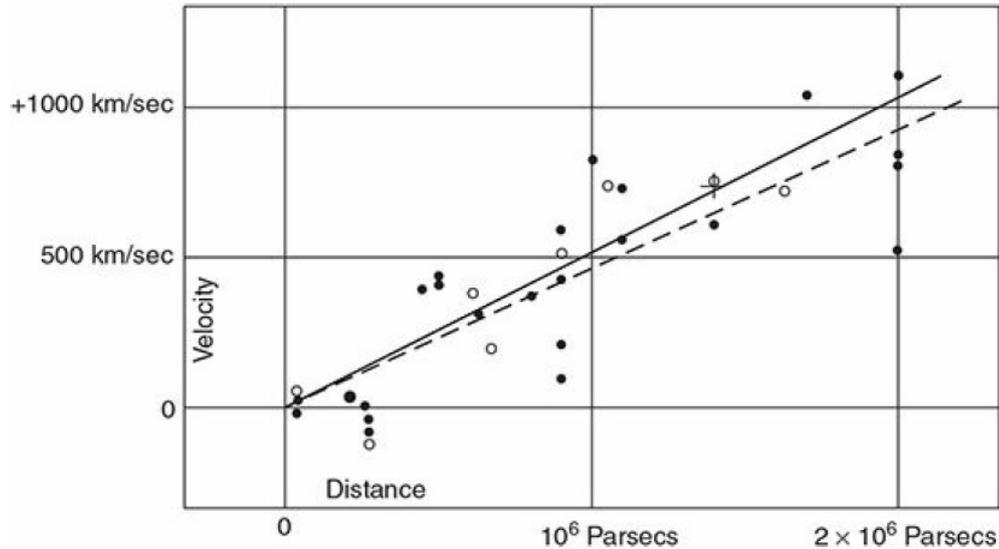


Figura 2 – Relação entre a velocidade de recessão e a distância entre galáxias encontrada por Edwin Hubble. (HUBBLE, 1929)

onde o ponto indica derivada temporal e  $a(t_0) = 1$ . Podemos relacionar esse parâmetro com o *redshift*  $z$  segundo

$$H = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (3.5)$$

Em 1998 e 1999 dois grupos de pesquisa independentes, *High-Z Supernova Search Team* (RIESS et al., 1998) e *Supernova Cosmology Project* (PERLMUTTER et al., 1999), respectivamente, estudaram se a expansão do Universo era acelerada, desacelerada ou constante.

Essas pesquisas utilizaram dados de supernovas do tipo Ia (SNIa) para restringir parâmetros cosmológicos e obtiveram resultados indicando uma expansão acelerada do Universo. A componente do Universo responsável por causar tal comportamento de expansão acelerada ainda é desconhecido e recebeu o nome de *energia escura*. No modelo  $\Lambda$ CDM, a energia escura é representada por  $\Lambda$ , possui densidade constante e pressão negativa (SCHNEIDER, 2006).

## 3.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A métrica que descreve a geometria do espaço-tempo que obedece ao Princípio Cosmológico e está em expansão é a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), definida pelo elemento de linha (WEINBERG, 1972)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.6)$$

onde

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2, \quad (3.7)$$

$t$  é tempo cósmico,  $a$  é o fator de escala e  $\kappa$  a constante de curvatura, que pode assumir os valores  $-1, 0$  e  $+1$  para geometrias hiperbólica (Universo espacialmente aberto), plana e esférica (Universo espacialmente fechado), respectivamente. Os dados observacionais atuais indicam um Universo espacialmente plano (AGHANIM et al., 2018).

### 3.3 Dinâmica Cósmica

A partir das equações de campo de Einstein 2.6 e da métrica FLRW 3.6 podemos determinar as equações de movimento para um Universo homogêneo e isotrópico em expansão (ou contração). O primeiro a obter essas equações foi o físico russo Alexander Friedmann, que as calculou antes de se saber sobre o comportamento de expansão do Universo, em 1922. Por isso, essas equações são conhecidas como *equações de Friedmann* (RYDEN, 2006).

Além da métrica FLRW, é pressuposto que o tensor momentum-energia seja o de um fluido perfeito, caracterizado por uma densidade própria  $\rho = \rho(x)$ , uma pressão escalar  $P = P(x)$  e pela quadrivelocidade  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ , onde  $\tau$  é o tempo próprio (D'INVERNO, 1992). O tensor momentum-energia de um fluido perfeito pode ser escrito como:

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

sendo satisfeito  $u^\mu u_\mu = -c^2 = -1$ .

Com isso, as equações de Friedmann são escritas como

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t) - \frac{\kappa c^2}{a^2(t)}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho(t) + 3P), \quad (3.10)$$

com  $\rho$  representando a densidade total de energia do Universo, isto é, a soma das densidades de cada componente.

Substituindo a equação 3.9 em 3.10, obtemos a equação de conservação de energia, chamada também de *equação do fluido*, dada por:

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right). \quad (3.11)$$

Essa *equação de estado* nos permite escrever a pressão como função da densidade, isto é,  $P = P(\rho)$ , segundo

$$P = w\rho, \quad (3.12)$$

onde  $w$  é um número adimensional, que possui diferentes valores a depender da componente do Universo avaliada:  $w_r = 1/3$  para a radiação,  $w_m = 0$  para a matéria e  $w_\Lambda = -1$  para a constante cosmológica  $\Lambda$  (RYDEN, 2006).

Substituindo 3.11 em 3.12 e integrando, vemos que é possível determinar a densidade de energia em função do fator de escala de acordo com

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (3.13)$$

onde  $\rho_0 = \rho(t_0)$ .

É útil definir a densidade crítica  $\rho_c$  como a densidade de energia necessária para o Universo ter geometria plana, ou seja, (RYDEN, 2006)

$$\rho_c \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H^2(t). \quad (3.14)$$

Logo, para  $\rho > \rho_c$  temos um Universo com curvatura positiva e para  $\rho < \rho_c$  temos curvatura negativa. Com isso, o *parâmetro de densidade* é dado por

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (3.15)$$

Com isso, além do parâmetro de Hubble definido em 3.4, outros importantes parâmetros cosmológicos são os parâmetros de desaceleração, de densidade de matéria, de densidade de radiação, de densidade de energia escura e de densidade de curvatura, dados, respectivamente, por

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (3.16)$$

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G}{3c^2 H^2(t)} \rho_m = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2(t)} \rho_{m,0} a^{-3}, \quad (3.17)$$

$$\Omega_r \equiv \frac{8\pi G}{3c^2 H^2(t)} \rho_r = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2(t)} \rho_{r,0} a^{-4}, \quad (3.18)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{8\pi G}{3c^2 H^2(t)} \rho_\Lambda = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2(t)} \rho_{\Lambda,0}, \quad (3.19)$$

e

$$\Omega_\kappa \equiv 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda. \quad (3.20)$$

A partir dos parâmetros de densidade atuais, a equação de Friedmann 3.9 pode ser reescrita como

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}]. \quad (3.21)$$

### 3.4 Setor escuro

Atualmente, a principal componente do Universo é a energia escura, responsável pela expansão acelerada do Universo e atribuída à constante cosmológica  $\Lambda$  no modelo padrão, possuindo densidade de cerca de 70% (AGHANIM et al., 2018).

Outra componente que também compõe o chamado setor escuro é a *matéria escura*, que interage apenas gravitacionalmente. Sua existência foi proposta após Fritz Zwicky, em 1933, ter analisado velocidades peculiares, isto é, velocidades não relacionadas à expansão do Universo, de galáxias pertencentes ao aglomerado de Coma. Ele percebeu que as velocidades de dispersão ao longo da linha de visada eram superiores às esperadas se estivessem apenas sujeitas à interação gravitacional da matéria luminosa (ANDERNACH; ZWICKY, 2017).

Em 1980, Vera Rubin analisou curvas de rotação em galáxias e percebeu um comportamento diferente do esperado para o decaimento da velocidade de rotação das estrelas em torno do centro das galáxias, como é mostrado na figura 3 (RUBIN; FORD W. K.; THONNARD, 1980). Essa é considerada outra evidência da existência da matéria escura.

O modelo padrão prevê que a matéria escura seja fria, ou CDM da sigla em inglês *Cold Dark Matter*, o que implica que seja constituída de partículas não relativísticas (RYDEN, 2006). Ela corresponderia a aproximadamente 24% da densidade total do Universo atual (AGHANIM et al., 2018).

Por considerar a presença de matéria escura fria e a energia escura dada pela constante cosmológica  $\Lambda$ , o modelo padrão é designado por modelo  $\Lambda$ CDM.

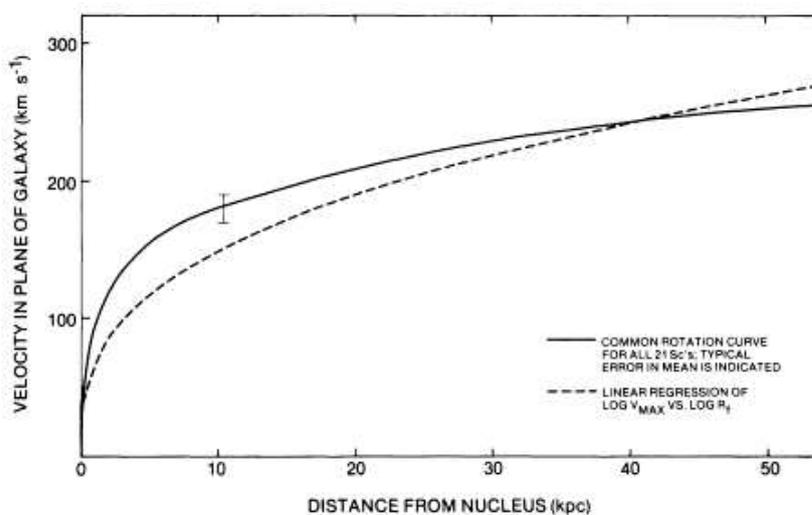


Figura 3 – O gráfico indica em linha sólida o resultado obtido através dos dados e em linha tracejada o resultado esperado na ausência de matéria escura (RUBIN; FORD W. K.; THONNARD, 1980).

### 3.5 Radiação Cós mica de Fundo

A radiação cósmica de fundo, cuja sigla em inglês é CMB, foi observada pela primeira vez pelos astrônomos Arno Penzias e Robert Wilson. Embora à época de sua descoberta não estivessem procurando detectá-la, uma explicação foi dada para essa radiação por Dicke, Peebles, Roll e Wilkinson (RYDEN, 2006).

Na época da equipartição matéria-radiação, momento no qual as densidades de radiação e matéria eram iguais, fótons e elétrons estavam acoplados em um fluido em equilíbrio térmico. Dessa forma, os fótons se comportavam segundo o espectro de corpo negro, como podemos ver na figura 4. O satélite COsmic Background Explorer (COBE), lançado em 1989, possibilitou o experimento *Far InfraRed Absolute Spectrophotometer* (FIRAS) que estimou sua temperatura em  $2,72548 \pm 0,00057$  K (FIXSEN, 2009).

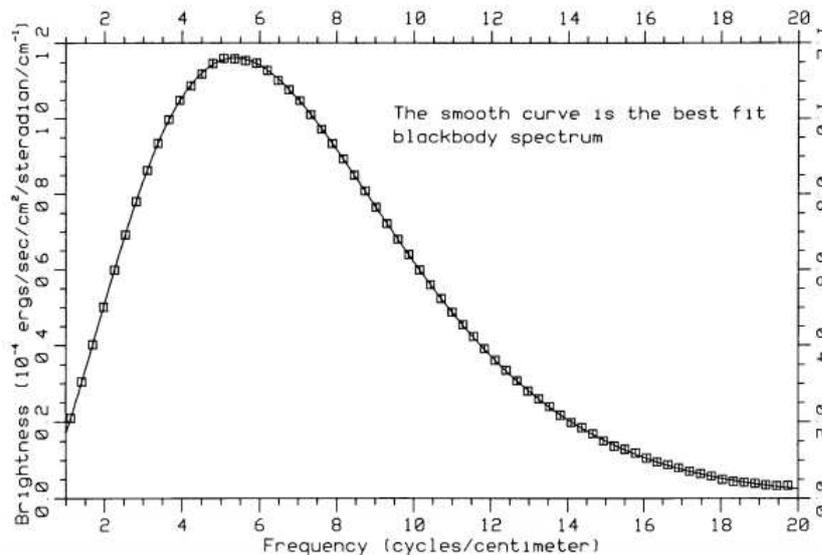


Figura 4 – Espectro da CMB segundo FIRAS. Os quadrados indicam os dados obtidos por FIRAS e a curva representa o melhor ajuste de corpo negro (Mather; Cheng et al., 1990).

À medida que o Universo se expande sua temperatura diminui proporcionalmente ao fator de escala segundo

$$T = T_0 \left( \frac{a_0}{a} \right). \quad (3.22)$$

Podemos definir a taxa de interação de partículas  $\Gamma$  como

$$\Gamma \equiv n\sigma c, \quad (3.23)$$

onde  $n$  é a densidade numérica,  $\sigma$  a seção de choque média e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Se  $\Gamma \gg H$  o equilíbrio entre as partículas é mantido, enquanto que se  $\Gamma \lesssim H$  temos o chamado *freeze-out* (BAUMANN, 2018), como mostrado na figura 5.

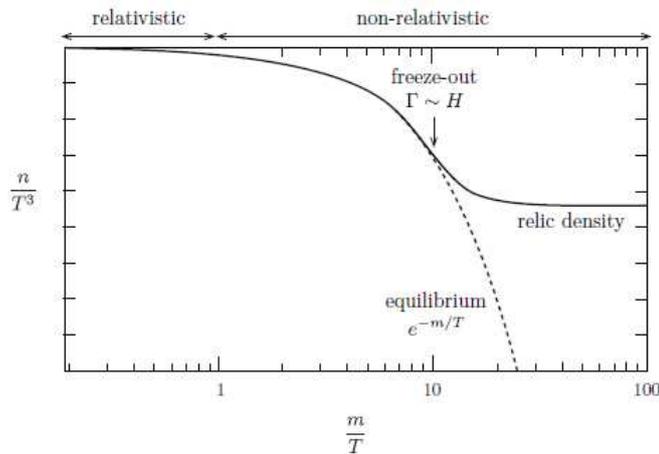


Figura 5 – Esquema de equilíbrio e *freeze-out* de partículas. Em altas temperaturas,  $T \gg m$ , a quantidade de partículas encontra seu valor de equilíbrio. Quando  $T \ll m$  temos o *freeze-out* e as partículas mantêm sua densidade. (BAUMANN, 2018)

No momento de *freeze-out* os elétrons são diluídos pela expansão mais rapidamente que os fótons podem interagir com eles. Quando isso ocorre, temos o desacoplamento, a uma temperatura de aproximadamente 3000 K. Após esse momento, os fótons se propagam livremente pelo universo, podendo ser observados por nós através da CMB.

Para um observador com velocidade peculiar diferente de zero, o espectro da CMB apresenta pequenas anisotropias, como podemos ver na figura 6.

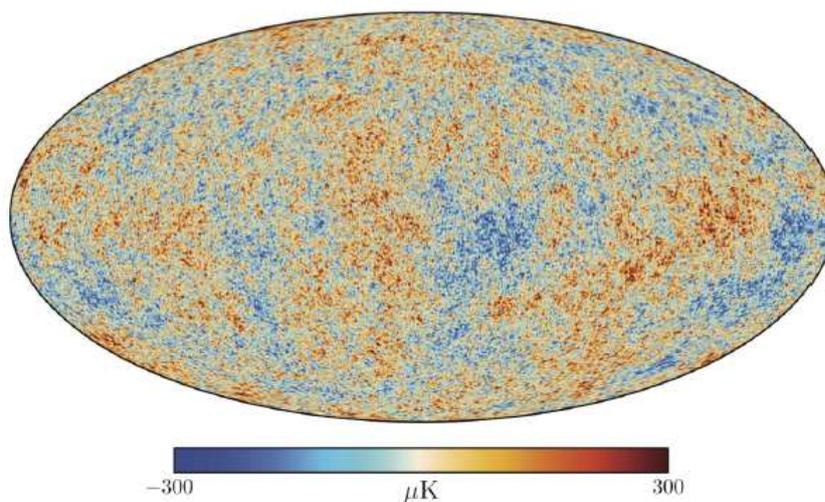


Figura 6 – Medidas de variação de temperatura da CMB pelo satélite Planck. As diferentes cores indicam as flutuações de temperatura indicadas pela escala de cores. (BAUMANN, 2018)

Devido a limitações na resolução angular das observações, costuma-se expan-

dir as anisotropias de temperatura em harmônicos esféricos  $Y_{\ell m}$ , parte angular das soluções específicas da equação de Laplace em coordenadas esféricas, segundo

$$\Theta(\hat{n}) \equiv \frac{T(\hat{n}) - \bar{T}}{\bar{T}} = \sum_{\ell m} \Theta_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}), \quad (3.24)$$

onde  $\bar{T}$  é a temperatura média. Podemos relacionar a escala  $\ell$  à escala angular  $\theta$  como  $\ell = 180/\theta$ .

Para flutuações estatisticamente isotrópicas, podemos definir o espectro de potência como

$$\langle \Theta_{\ell m}^* \Theta_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell. \quad (3.25)$$

O gráfico da figura 7 mostra o espectro de potência obtido pela colaboração Planck em 2018 (AGHANIM et al., 2018).

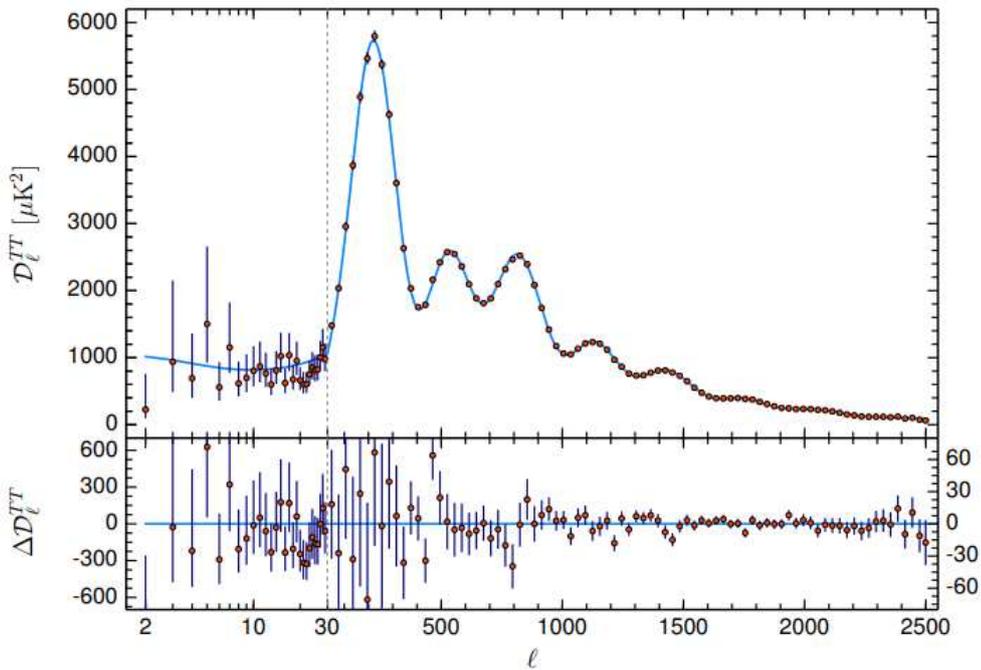


Figura 7 – Espectro de potência da temperatura da CMB medidas por Planck 2018. Na figura,  $D_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$ . (AGHANIM et al., 2018)

A partir da CMB é possível inferir dados de parâmetros cosmológicos como, por exemplo, a densidade relativa de bárions e de matéria escura, que atualmente são, respectivamente,  $\Omega_b h^2 = 0.02233 \pm 0.00015$  e  $\Omega_c h^2 = 0.1198 \pm 0.0012$  (AGHANIM et al., 2018). Tais resultados indicam o percentual da matéria bariônica e escura, respectivamente, que foram comentados na seção 3.4.

### 3.6 Período inflacionário

Alguns problemas motivaram a inserção de uma expansão exponencial do Universo, denominada de inflação. Os principais são o *problema da planura* e o *problema do horizonte*.

A curvatura espacial se relaciona com a densidade relativa  $\Omega$  a partir das equações de Friedmann segundo (SCHNEIDER, 2006)

$$1 - \Omega(t) = -\kappa \left( \frac{c/H(t)}{a(t)R_0} \right)^2, \quad (3.26)$$

onde  $R_0$  é o raio de curvatura. No momento presente, 3.26 pode ser escrita como

$$1 - \Omega_0 = -\kappa \left( \frac{c/H_0}{R_0} \right)^2. \quad (3.27)$$

Essas duas últimas equações combinadas nos levam a

$$1 - \Omega(t) = \left( \frac{H_0}{H(t)a(t)} \right)^2 (1 - \Omega_0). \quad (3.28)$$

Atualmente temos que  $|1 - \Omega_0|$  tem 1 como limite superior, aproximadamente. Isso implica que o parâmetro de densidade total deve ter sido muito próximo da unidade em tempos primordiais, ou seja, se o Universo é espacialmente plano hoje em dia, ele também o era em seus primórdios.

Assim, precisamos de um mecanismo que tenha feito com que o Universo se tornasse plano ainda em seu estágio primordial, já que isso não ocorre naturalmente sem a inserção desse mecanismo. Este é o chamado problema da planura. A figura 8 ilustra as distinções entre o modelo padrão e a teoria inflacionária, indicando que esta última solucionaria esse problema.

A fim de enunciar o problema do horizonte, analisemos o horizonte, distância própria no momento da observação, à época da recombinação, momento em que núcleos capturam elétrons e formam átomos de hidrogênio neutros.

A distância comóvel que a luz viaja até um momento  $t$  pode ser escrita como (SCHNEIDER, 2006)

$$d_C(z) = \int_0^t \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{cda}{a^2 H(a)}. \quad (3.29)$$

À época da recombinação,  $z \approx 1100$ , temos  $H(a) \approx H_0 \sqrt{\Omega_m} a^{-3/2}$  e

$$d_C(z) \approx 2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z)\Omega_m}}, \quad (3.30)$$

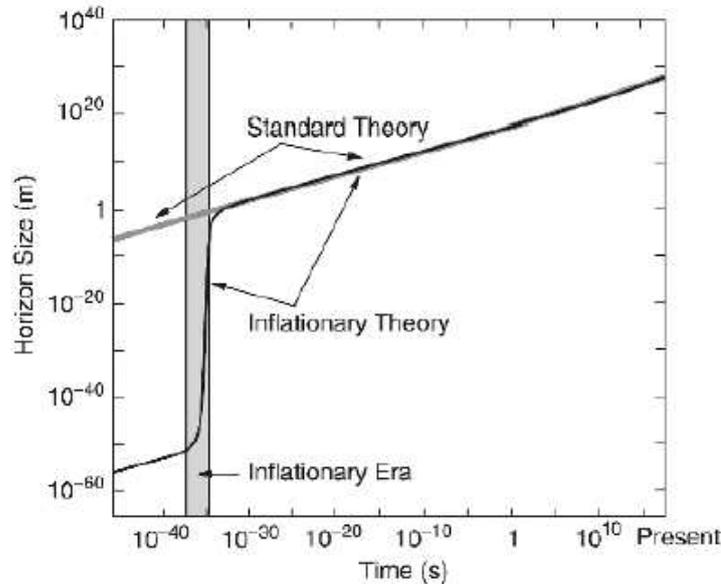


Figura 8 – Esquema representativo da inflação. Nele, a teoria padrão representada pela reta crescente indica o crescimento do fator de escala através das equações de Friedmann e a área hachurada mostra o período inflacionário. (SCHNEIDER, 2006)

e a distância própria  $d_p = ad_C$

$$d_p(z_{rec}) \approx 2 \frac{c}{H_0} \Omega_m^{-1/2} (1 + z_{rec})^{-3/2}. \quad (3.31)$$

Considerando  $\Omega_\Lambda = 0$ , a distância angular no céu será

$$\theta_{rec} = \frac{d_p(z_{rec})}{D_A(z_{rec})} \approx 2\sqrt{\Omega_m}, \quad (3.32)$$

que é aproximadamente um grau no céu.

Dessa forma, o problema do horizonte consiste em que regiões distantes por mais que cerca de um grau no céu hoje não estariam conectadas causalmente à época da radiação cósmica de fundo (CMB) e não teriam, portanto, motivo para terem propriedades semelhantes, em especial a temperatura. Sabemos, entretanto, que as variações de temperatura são apenas da ordem de  $\Delta T/T \approx 10^{-5}$  (SCHNEIDER, 2006).

A solução encontrada para esses dois problemas foi a de considerar que, em momentos iniciais do universo, havia a dominação da densidade de energia escura. Em outras palavras, no período inflacionário,

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1, \quad (3.33)$$

que é a densidade total do universo naquele período. Assim,  $\dot{a}/a \approx \sqrt{\Lambda/3}$  e teríamos uma expansão exponencial do universo:

$$a(t) \propto \exp \sqrt{\Lambda/3} t. \quad (3.34)$$

A expansão exponencial teria fim com o processo de reaquecimento e o fator de escala passaria a ser governado através das eras de radiação e de matéria regidas pelas equações de Friedmann.

A inflação soluciona o problema da planura pois o Universo se tornaria espacialmente plano após a expansão exponencial, independentemente da sua curvatura inicial. Também soluciona o problemas do horizonte, uma vez que um período de expansão exponencial faz com que o tamanho do horizonte aumente exponencialmente.

Apesar da inflação ser um cenário plausível, seus mecanismos não são completamente compreendidos (SCHNEIDER, 2006).

## 4 Gravidade Unimodular

A existência de problemas no modelo padrão motiva diversos pesquisadores a procurarem analisar dados observacionais de forma independente de modelo cosmológico, enquanto outros buscam alternativas ao modelo padrão, alterando, por exemplo, a teoria de gravidade que leva ao modelo cosmológico. Aqui trataremos da Gravidade Unimodular como alternativa à Relatividade Geral.

### 4.1 Problemas no modelo padrão

Embora o modelo  $\Lambda$ CDM seja o que mais concorda com evidências experimentais, há muitos problemas nele envolvidos. Embora seja o modelo padrão, não sabemos o funcionamento das componentes que levam a seu nome, ou seja, não se sabe de que é constituída a matéria escura fria CDM e do que se trata essa componente que leva à expansão acelerada do Universo, a constante cosmológica  $\Lambda$ .

Algumas divergências em resultados experimentais também levam a grandes discussões. Uma das mais famosas é a chamada *tensão de  $H_0$* , que consiste em valores observacionais muito distintos para esse parâmetro cosmológico (GUO; ZHANG; ZHANG, 2019). Observações da colaboração Planck do espectro de potência da radiação cósmica de fundo levaram a  $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (AGHANIM et al., 2018), enquanto que dados locais de Riess et al. de 2016 levaram a  $H_0 = 73,00 \pm 1,75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (RIESS et al., 2016).

O problema que motiva este trabalho é o chamado *problema da constante cosmológica*. A constante cosmológica  $\Lambda$ , como comentamos anteriormente, tem equação de estado  $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$  e pode ser escrita como

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_\Lambda. \quad (4.1)$$

A energia do vácuo estimada por Weinberg (WEINBERG, 1989), considerando a Relatividade Geral válida em escalas do comprimento de Planck, é de

$$\rho_\Lambda \simeq 2 \times 10^{71} \text{ GeV}^4, \quad (4.2)$$

enquanto que observações astronômicas indicam

$$\rho_{obs} \simeq 10^{-47} \text{ GeV}^4. \quad (4.3)$$

Assim, temos a divergência entre os valores estimados e observados para a densidade de energia do vácuo em aproximadamente 120 ordens de grandeza.

Há três formas de se abordar o problema (ELLIS et al., 2011): considerar que outros campos poderiam contribuir com densidade de energia negativa, de modo a resultar no valor observado; considerar que o valor 4.2 é apenas estimado; ou considerar que as equações de campo dadas por 2.13 não são as que melhor representam as interações gravitacionais. Essa última forma é a abordada neste trabalho.

## 4.2 Gravidade Unimodular aplicada à Cosmologia

A Gravidade Unimodular foi obtida pelo próprio Einstein em 1919 como alternativa à Relatividade Geral para estudar partículas elementares em termos de campos de radiação (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017). Suas equações de campo são descritas pelas seguintes equações de traço nulo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Tg_{\mu\nu} \right), \quad (4.4)$$

onde  $T$  é o traço do tensor momentum-energia.

Essas equações de campo podem ser obtidas através do princípio variacional utilizando a ação de Einstein-Hilbert restringindo-na a variações  $g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = 0$ . Isso equivale a utilizar a *condição unimodular* em que o determinante da métrica é constante, podendo ser escrito como

$$g = \epsilon = 1. \quad (4.5)$$

Essa condição equivale a um elemento de volume fixo no espaço-tempo (BUFALO; OKSANEN; TUREANU, 2015).

As identidades de Bianchi resultam na lei de conservação modificada (FABRIS et al., 2022b)

$$\frac{1}{4}\nabla^\nu R = 8\pi G \left( \nabla_\mu T^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\nabla^\nu T \right). \quad (4.6)$$

Ao passo que a conservação do tensor de Einstein 2.11 se mantém, é possível ver em 4.6 que a conservação do tensor momentum-energia 2.12 não é mais consequência direta da teoria, tendo de ser imposta se assim julgarmos necessário. Fazer uso dessa conservação é uma forma de driblar o fato de que a Gravidade Unimodular possui 9 equações independentes, ao passo que a Relatividade Geral possui 10.

Impondo a conservação 2.12, a equação 4.6 se torna

$$\nabla^\nu R = -8\pi G \nabla^\nu T, \quad (4.7)$$

cuja integração resulta em

$$R = 8\pi GT - \Lambda, \quad (4.8)$$

onde  $\Lambda$  é a constante de integração identificada como a cosmológica cosmológica. Evidenciando  $T$  e substituindo em 4.4, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Portanto, a escolha de conservação do tensor momentum-energia reduz a Gravidade Unimodular em Relatividade Geral com constante cosmológica. Entretanto, as novas equações de campo obtidas fazem com que não haja qualquer relação direta da energia do vácuo com efeitos gravitacionais, já que  $\Lambda$  advém da integração de 4.7 (GARCÍA-ASPEITIA et al., 2019). Nesse cenário, o valor da constante  $\Lambda$  não necessariamente deve ser igual ao valor observado da energia do vácuo, o que soluciona o problema da constante cosmológica. (ELLIS et al., 2011)

Se, no entanto, considerarmos a não conservação do tensor momentum-energia, isto é,  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} \neq 0$ , interessantes resultados podem ser obtidos, previstos, por exemplo pela gravidade quântica (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017). No contexto da análise da energia escura, o cenário não conservativo indica flutuações no valor de  $\Lambda$  ao longo da história do Universo. Pequenas violações na conservação podem não ser o suficiente para se perceber alterações em testes locais, mas ainda assim serem relevantes ao contexto cosmológico atual.

Assumindo o Princípio Cosmológico e utilizando a métrica FLRW com  $\kappa = 0$ , podemos obter as equações de Friedmann modificadas para a Gravidade Unimodular não conservativa, obtendo (GARCÍA-ASPEITIA et al., 2019), (FABRIS et al., 2022b), (ELLIS et al., 2011), (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017)

$$H^2 = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} + \frac{\Lambda_{ef}(t)c^2}{3} \quad (4.10)$$

e

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right), \quad (4.11)$$

onde  $\Lambda_{ef}(t)$  é a energia escura efetiva, dada por possíveis violações da conservação de  $T^{\mu\nu}$ . Vale ressaltar que, embora  $\Lambda_{ef}$  seja função do tempo, ela passa a se tornar constante conforme a densidade de matéria se dilui com a expansão do Universo, como podemos observar na figura 9 (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017).

Definindo

$$J_\mu \equiv \nabla^\nu T_{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

temos a condição de que violações na conservação do tensor momentum-energia são permitidas na Gravidade Unimodular desde que tenham a forma integrável

$$J_\mu = \nabla_\mu Q, \quad (4.13)$$

onde  $Q$  é um campo escalar (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017).

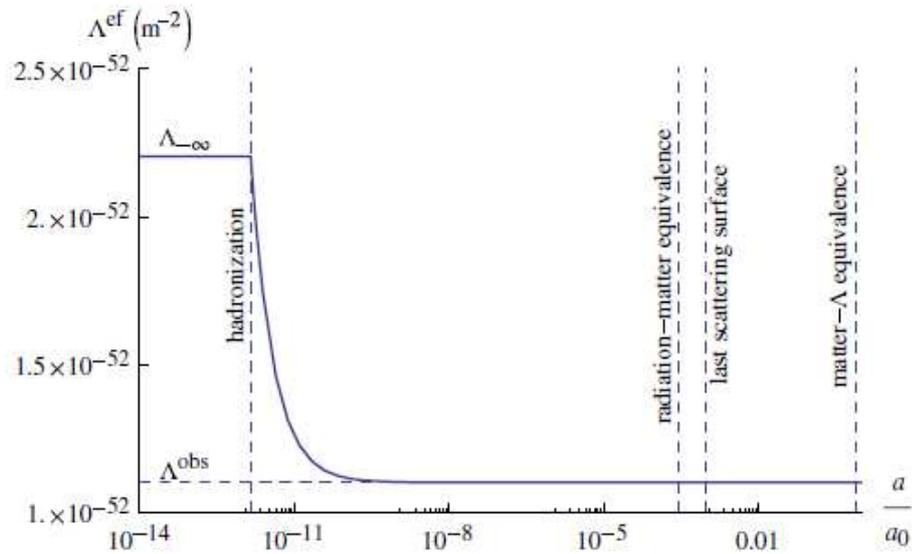


Figura 9 – Constante cosmológica efetiva no modelo de dinâmica quântica modificada, com criação de energia proporcional à massa dos objetos que colapsam (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017).

Se tal condição não for satisfeita, teremos uma constante cosmológica efetiva que varia muito em tempos recentes. Ao considerarmos o Princípio Cosmológico, entretanto, fazemos a condição de integrabilidade 4.13 automaticamente satisfeita, visto que em grandes escalas não seriam relevantes possíveis violações em pequenas escalas dessa condição.

Em 2017, Thibaut Josset, Alejandro Perez e Daniel Sudarsky (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017) utilizaram modelos de gravidade quântica e mecânica quântica modificada para verificar a possibilidade da Gravidade Unimodular não conservativa solucionar o problema da constante cosmológica. Nesse trabalho, os pesquisadores encontraram valores numéricos que ilustram como pequenas alterações na dinâmica local podem levar  $\Lambda_{ef}$  à ordem do valor observado  $\Lambda_{obs}$ .

Apesar de terem utilizado modelos específicos, esse resultado pode ser estender a outros regimes desde que a condição 4.13 seja satisfeita (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017).

## 5 Conclusão

Esse trabalho teve por objetivo principal apresentar a Gravidade Unimodular no cenário cosmológico, a fim de estudar a possibilidade de tal teoria solucionar o problema da constante cosmológica.

O problema que buscamos solucionar consiste na existência de uma divergência de aproximadamente 120 ordens de grandeza entre os valores observado e estimado da densidade de energia do vácuo  $\Lambda$ , pelo modelo padrão. Tal problema preocupa estudiosos da área desde a descoberta da expansão do Universo por Edwin Hubble em 1929 (HUBBLE, 1929).

A Gravidade Unimodular, proposta pelo próprio Albert Einstein 1919, consiste em uma teoria modificada da Relatividade Geral cujo traço é nulo e o determinante da métrica é constante.

As equações de campo modificadas apresentam uma importante propriedade: o tensor momentum-energia  $T_{\mu\nu}$  não necessariamente é conservado. Assim, temos a liberdade de estudar a Gravidade Unimodular conservativa e não conservativa.

No contexto conservativo, as equações de campo recaem nas equações da Relatividade Geral com constante cosmológica  $\Lambda$ , com a importante diferença que essa constante surge como uma constante de integração, sendo independente de qualquer valor fundamental da energia do vácuo. Sendo assim,  $\Lambda$  não necessariamente deve ter o valor observacional da energia do vácuo  $\Lambda_{obs}$ , o que soluciona o problema da constante cosmológica (ELLIS et al., 2011).

Já no contexto não conservativo conseguimos ir além. Um estudo de 2017 (JOSSET; PEREZ; SUDARSKY, 2017) analisou esse cenário utilizando modelos de mecânica quântica modificada e gravidade quântica, obtendo resultados de  $\Lambda$  da ordem de  $\Lambda_{obs}$ . Apesar de terem sido estudados modelos específicos, esse resultado pode ser estendido para os casos nos quais a violação da conservação do tensor momentum-energia seja integrável. Sendo assim, a Gravidade Unimodular não conservativa também resolve o problema da constante cosmológica.

Assim, a Gravidade Unimodular se mostra uma teoria que soluciona o problema da constante cosmológica em diferentes regimes, sendo interessante, portanto, analisar se essa teoria é viável para outras aplicações astronômicas. Para estudos futuros, cabem ser estudados mais profundamente qual cenário, o conservativo ou o não conservativo, se adequam mais a observações e estendê-los a novas análises quantitativas.

# Referências

- ADLER, S. L. *Modern Physics Letters A*, v. 36, n. 40, 2021. [8](#)
- AGHANIM, P. C. N. et al. *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. 2018. [16](#), [18](#), [21](#), [25](#)
- ANDERNACH, H.; ZWICKY, F. *English and Spanish Translation of Zwicky's (1933) The Redshift of Extragalactic Nebulae*. 2017. [18](#)
- BAUMANN, D. Primordial Cosmology. *PoS, TASI2017*, p. 009, 2018. [19](#), [20](#)
- BUFALO, R.; OKSANEN, M.; TUREANU, A. How unimodular gravity theories differ from general relativity at quantum level. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 75, n. 10, 2015. [26](#)
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford, NY: Clarendon Press, 1992. [9](#), [10](#), [11](#), [12](#), [16](#)
- ELLIS, G. F. R. et al. On the trace-free einstein equations as a viable alternative to general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 22, p. 225007, 2011. [5](#), [6](#), [26](#), [27](#), [29](#)
- FABRIS, J. C. et al. Nonconservative unimodular gravity: Gravitational waves. *Symmetry*, v. 14, n. 1, 2022. [8](#)
- FABRIS, J. C. et al. Nonconservative unimodular gravity: a viable cosmological scenario? *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 82, n. 6, 2022. [8](#), [26](#), [27](#)
- FALCIANO, F. Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física [online]*, v. 31, n. 4, 2009. [10](#)
- FIXSEN, D. J. The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 707, n. 2, p. 916–920, 2009. [19](#)
- GARCÍA-ASPEITIA, M. A. et al. Cosmic acceleration in unimodular gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 99, p. 123525, 2019. [27](#)
- GUO, R.-Y.; ZHANG, J.-F.; ZHANG, X. Can the  $H_0$  tension be resolved in extensions to  $\Lambda$ CDM cosmology? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2019, n. 02, p. 054, 2019. [25](#)
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Washington, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. [14](#), [15](#), [29](#)
- JOSSET, T.; PEREZ, A.; SUDARSKY, D. Dark energy from violation of energy conservation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 118, p. 021102, 2017. [5](#), [6](#), [8](#), [26](#), [27](#), [28](#), [29](#)

LEMAÎTRE, G. L'univers en expansion. *Publications du Laboratoire d'Astronomie et de Geodesie de l'Universite de Louvain*, Louvain, v. 10, p. 1–19, 1933. [14](#)

Mather, J. C.; Cheng, E. S. et al. A Preliminary Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite. , v. 354, p. L37, 1990. [19](#)

PERLMUTTER, S. et al. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *Astrophysical Journal*, Berkeley, CA, v. 517, n. 2, 1999. [15](#)

RIESS, A. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astronomical Journal*, University of California, Berkeley, CA, v. 116, n. 3, 1998. [15](#)

RIESS, A. G. et al. A 2.4% determinations of the local value of the Hubble constant. *American Astronomical Society*, v. 826, n. 1, p. 56, 2016. [25](#)

RINDLER, W. *Relativity: Special, general, and cosmological*. 2. ed. New York: Oxford University Press, 2006. 430 p. [12](#)

RUBIN, V. C.; FORD W. K., J.; THONNARD, N. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc). *Astrophysical Journal*, v. 238, p. 471–487, 1980. [18](#)

RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. 1. ed. Ohio: Pearson, 2006. 295 p. [16](#), [17](#), [18](#), [19](#)

SCHNEIDER, P. *Extragalactic Astronomy and Cosmology: An introduction*. 1. ed. Universität Bonn: Springer, 2006. 458 p. [15](#), [22](#), [23](#), [24](#)

WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. 1. ed. Massachusetts Institute of Technology: John Wiley Sons, Inc, 1972. 680 p. [14](#), [15](#)

WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, 1989. [25](#)