UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS DIADEMA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
ESPECIALIZAÇÃO EM TEORIA DA RELATIVIDADE

José Grimário de Lima Júnior

Obtendo as Relações de Mapeamento Para a Teoria de Gravidade $f(R,T)$

Diadema, São Paulo
17/11/2022

José Grimário de Lima Júnior

Obtendo as Relações de Mapeamento Para a Teoria de Gravidade $f(R, T)$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de especialista em teoria da relatividade, ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema.

Universidade Federal de São Paulo

Campus Diadema

Departamento de Física

Especialização em Teoria da Relatividade

Orientador: Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

Diadema, São Paulo

17/11/2022

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Lima Júnior, José Grimário de
Obtendo as Relações de Mapeamento Para a Teoria de Gravidade f(R,T) / José Grimário de Lima Júnior. – – Diadema, 2022.
31 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Teoria da Relatividade) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2022.

Orientador: Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

1. Relatividade Geral. 2. Teorias de Gravidade Baseadas em Ricci. 3. Teoria de gravidade f(R,T). 4. Mapeamento. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas, Campus Diadema da Universidade Federal de São Paulo, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

José Grimário de Lima Júnior

Obtendo as Relações de Mapeamento Para a Teoria de Gravidade $f(R,T)$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de especialista em teoria da relatividade, ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema.

Trabalho aprovado. Diadema, São Paulo, 17/11/2022:

Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes(Orientador)
UFABC

Prof(a). Dr(a). Nadja Simão Magalhães
UNIFESP

Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia
UNIFESP

José Grimário de Lima Júnior
Candidato

Diadema, São Paulo
17/11/2022

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, a todos os meus familiares, amigos e a todos que estiveram comigo durante esta jornada.

Agradecimentos

- Aos meus pais, por todo o apoio e dedicação que sempre tiveram comigo. Agradeço também a meu irmão Giovani, e todos os familiares que sempre estiveram comigo.
- Ao Prof. Dr. Pedro Moraes, que me orientou durante a realização deste trabalho. Agradeço também por seus ensinamentos, atenção, dedicação, paciência, conselhos, incentivo e principalmente pela confiança depositada a mim para a realização deste trabalho.
- A todos os docentes que compõem o Curso de Especialização em Teoria da Relatividade da UNIFESP que muito contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal.
- Aos colegas de pesquisa Elias Brito, Thais Guerini. E em especial ao meu amigo Jéferson Sales por me incentivar a participar desta Especialização e por toda ajuda e companheirismo ao longo da mesma.
- Ao meu orientador do Doutorado na UFAL, Prof. Dr. Tiago Mariz, pela compreensão na realização desta Especialização e pelo incentivo em sempre buscar conhecimento.
- Aos meus amigos, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio e compreensão em minha ausência, demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei aos meus estudos.
- A todos os professores que tive ao longo de minha vida que contribuiram para que eu chegasse até está etapa da minha vida, em especial: Prof. Dr. Fábio Medeiros por todo o incentivo durante a graduação, e também, à Prof. Dr. Pedro Segundo e ao Prof. Dr. Joseclécio Dantas sempre pelas longas conversas.
- Enfim, a todos aqueles que diretamente ou indiretamente contribuíram com minha formação acadêmica, meu muito obrigado!

"Tudo o que temos de decidir é o que fazer com o tempo que nos é dado."
(Gandalf)

Resumo

Neste trabalho, vamos estender o método de mapeamento para a teoria de gravidade $f(R,T)$. Este método recém desenvolvido utilizado na teoria de gravidade $f(R)$ é capaz de relacionar as soluções da Relatividade Geral (RG) com as Teorias de Gravidade Baseadas em Ricci (RBGs), formuladas "*à Lá Palatini*", o que torna possível a utilização de resultados e métodos muito consistentes da RG para explorar novos resultados nesse contexto estendido da teoria gravitacional. Obtemos as relações de mapeamento tanto para o caso onde um campo escalar funciona como fonte de matéria, quanto para o caso onde a fonte de matéria é representado por um fluído anisotrópico. Isso pode permitir a utilização de métodos e resultados bem estabelecidos da RG para explorar novos resultados da teoria gravitacional além dela.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Teorias de Gravidade Baseadas em Ricci, Teoria de gravidade $f\left(R,T\right)$. Mapeamento.

Abstract

In this work, we will extend the mapping method to the theory of gravity $f(R,T)$. This newly developed method used in the $f(R)$ theory of gravity is able to relate the General Relativity (GR) solutions with the Ricci-Based Theories of Gravity (RBGs), formulated "à la Palatini", which makes it possible to use of very consistent GR results and methods to explore new results in this extended context of gravitational theory. We obtain the mapping relations both for the case where a scalar field works as a source of matter, and for the case where the source of matter is represented by an anisotropic fluid. This may allow the use of well-established GR methods and results to explore new results from gravitational theory beyond it.

Keywords: General Relativity. Ricci-Based Gravity theories. Theory of Gravity $f\,(R,T)$. Mapping.

Sumário

1 Introdução

A Relatividade Geral (RG) é uma teoria muito bem consolidada e mesmo estando em concordância com dados cosmológicos de supernovas e CMB, no entanto, para que essa concordância seja válida é necessário que o Universo seja composto de aproximadamente 70% de Energia Escura [1, 2, 3, 4, 5], energia esta, que de acordo com a RG, está na forma de uma constante cosmológica. Entretanto, quando interpretamos essa constante cosmológica como energia quântica do vácuo, a física de partículas prevê um valor muito maior para essa constante [6, 7]. A fim de solucionar problemas deste tipo, alguns pesquisadores passaram a considerar abordagens alternativas a essa teoria. Na literatura, é possível encontrar trabalhos onde se mapeiam resultados das Teorias $f(R)$, $f(R,Q)$ onde R representa o Escalar de curvatura de Ricci e $Q = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de curvatura de Ricci.

E também, a teoria *EiBI* (iniciais do termo em inglês: *Eddington-inspired Born-Infeld gravity*), proposta em [8]), pois foi constatado que, em certos sistemas, as soluções desse modelo caraterizando buracos negros ou outros objetos compactos, podem evitar ou melhorar singularidades, o que poderia trazer modificações significativas nos resultados padrão da astrofísica estelar [9, 10, 11].

Este conjunto de teorias fazem parte da família de teorias baseadas no tensor de Ricci RBGs (iniciais do termo inglês: Ricci-Based Gravities), [12, 13]. A utilização deste mapeamento é possível quando essas teorias *RBGs* são formuladas "*à lá Palatini*". Este procedimento permite a utilização de resultados e métodos da RG para explorar novos resultados nessas teorias alternativas da gravidade.

A existência deste procedimento mostra uma grande vantagem para este tipo de teoria, pois é capaz de mostrar que existe uma relação entre o espaço de soluções de ambas as teorias. Isso traz implicações técnicas importantes, pois é possível definir um problema em uma dada teoria *RBG*, mapeá-lo em *RG*, onde pode ser resolvido por métodos analíticos ou numéricos bem conhecidos e, em seguida, trazer a solução obtida de volta à teoria *RBG* original, via transformações puramente algébricas, evitando assim a necessidade de desenvolver métodos específicos para aquela teoria *RBG* em particular.

O objetivo principal deste trabalho é estender o método de mapeamento para a teoria $f(R,T)$, obtendo as relações de mapeamento entre a *RG* e a teoria em questão. Para isso, abordaremos uma teoria *RGB* geral, considerando matéria escalar, com o intuito de apresentar o funcionamento do método. Em seguida, estenderemos o mapeamento para o caso de fluidos anisotrópicos.

A existência deste procedimento é essencialmente útil para aplicações em astrofísica e cosmologia de modelos não lineares da matéria. Por um lado, este procedimento pode trazer uma sobrevida a vários modelos, em particular àqueles que são descartados no cenário da Relatividade Geral devido à falta de significado físico. Por outro lado, aproveitando toda a capacidade dos métodos analíticos e numéricos desenvolvidos dentro da RG, pode-se agora explorar com detalhes novas aplicações astrofísicas e cosmológicas de *RBGs*, algo dificilmente acessível prévio ao desenvolvimento desse método, devido a alta não linearidade das equações de campo *RBGs*.

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos a teoria de gravidade $f(R, T)$, onde obtemos as equações de campo para o formalismo de Palatini ou métrico-afim como é também conhecida, também obtemos uma forma para o tensor de Einstein.

Já o capítulo 3 é dedicado a trazer uma descrição geral das teorias *RBGs* e a obtenção das suas respectivas equações de campo. O método de mapeamento entre as *RBGs* e a *RG* está descrito no capítulo 4, onde apresentamos um caso geral para este método considerando um campo escalar. Descrevemos também as relações de mapeamento para o caso de fluidos anisotrópicos.

Por fim, o capítulo 5 está reservado às conclusões, onde trazemos um resumo juntamente de algumas perspectivas para pesquisas futuras.

2 Teorias de Gravidade $f(R,T)$

A RG é uma teoria muito bem consolidada, e seus resultados à nível do Sistema Solar se mostram bem consistentes, mesmo ainda havendo algumas questões em aberto. A classe de Teorias de Gravidade $f(R,T)$ proposta em [14] e, que vem sendo amplamente estudada nos últimas anos [15, 16, 17, 18].

Um fato importante quando consideramos esta teoria é que ela inclui as pequenas anisotropias que aparecem na radiação cósmica de fundo devido as flutuações quânticas por inflação [19]. Na literatura, é possível encontrar formas diferentes em se obter as equações de campo na teoria $f(R,T)$, a saber, o formalismo métrico e o formalismo métrico-afim ou Palatini como é comumente chamada. Neste capítulo vamos nos concentrar em trabalhar com o formalismo de Palatini. Pois trabalhar com este formalismo trás alguns, por exemplo, as equações de campo que se obtém, são de segunda ordem na métrica. Diferente do que acontece quando utilizamos o formalismo métrico, onde temos apenas uma equação de campo e esta é de quarta ordem na métrica que traz problemas para esta teoria métrica, que será discutido ao longo do capítulo.

2.1 Teoria $f(R,T)$ via Formalismo de Palatini

As Teorias de Gravidade $f(R,T)$ consistem basicamente em substituir o escalar de curvatura por uma função não linear do próprio escalar juntamente com o traço do tensor energia-momento. Então, para as teorias $f(R,T)$, a ação de Einstein-Hilbert é escrita por uma ação da seguinte forma [20]:

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(R,T) + S_M(g_{\mu\nu},\psi) \ , \tag{2.1}$$

onde a ação de matéria é representada por S_M e os campos de matéria representado, por ψ, da mesma maneira que acontece na RG.

Quando se trata do formalismo de Palatini, a conexão $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ é independente da métrica $g_{\mu\nu}$. Sendo assim, vamos passar a adotar um tensor de Ricci formado a partir da conexão independente e da métrica ($\mathcal{R}_{\mu\nu}$). Com isto, também podemos adotar um scalar de Ricci ($\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$) e o traço do tensor energia momento $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$, por consequência.

Agora, realizando a variação da ação com respeito à métrica e à conexão, para o setor gravitacional, obtemos:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4\left[\left(\delta\sqrt{-g}\right)f + \sqrt{-g}\left(f_{\mathcal{R}}\delta\mathcal{R} + f_T\delta T\right)\right] \ . \tag{2.2}$$

A partir agora, para simplificar nossas equações, iremos considerar a seguinte notação: $f_{\mathcal{R}} \equiv df/d\mathcal{R}$, $f_T \equiv df/dT$ e $f \equiv f(\mathcal{R},T)$. A variação do determinante da métrica ($\sqrt{-g}$)

é:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \ , \tag{2.3}$$

e a variação do Escalar de Ricci é dada por:

$$\delta\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} \ . \tag{2.4}$$

Para descrever a variação do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ com respeito à métrica, vamos introduzir um novo tensor $\Theta_{\mu\nu}$ [20], definido como;

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \ . \tag{2.5}$$

Então,

$$\begin{aligned} \delta T &= \delta\left(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}\right) = \left(T_{\alpha\beta}\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} + \Theta_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\ &= \left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Desta forma, temos que a variação da (2.2) assume a seguinte forma:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} + f_T\left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right)\right)\delta g^{\mu\nu} + f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}\right] \ . \tag{2.7}$$

Da RG, sabe-se que qualquer tensor que possui dois índices pode ser escrito como sendo a soma da sua parte simétrica com a sua parte anti-simétrica, ou seja, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{(\mu\nu)} + \mathcal{R}_{[\mu\nu]}$, onde a parte simétrica e a parte anti-simétrica são expressas por $(\mu\nu)$ e $[\mu\nu]$ respectivamente. Então, para o primeiro termo da integral da Eq. (2.7), obtém-se $\mathcal{R}_{[\mu\nu]}\delta g^{\mu\nu} = 0$, pois a métrica inversa $g^{\mu\nu}$ é simétrica.

Para o setor de matéria, temos

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int d^4x\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right) \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{T_{\mu\nu}}{2}\right)\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde, o tensor Energia-Momento é expresso por: $T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}}$. Cabe ressaltar que, a ação de matéria é independente das conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, e depende somente da métrica $g_{\mu\nu}$ e dos campos de matéria. Este é um fato relevante, pois impossibilita a quebra do Princípio de Equivalência de Einstein [21].

Passamos agora a considerar que as conexões sejam simétricas, ou seja, que a torsão seja nula. Esta consideração pode ser feita pois, nos casos em que o tensor de Ricci seja simétrico, a conexão pode ser escrita como sendo a soma de um termo simétrico mais uma parte vetorial, esta chamada de modo projetivo, que serve de fonte para a torção. No entanto, em virtude da invariância projetiva do tensor de Ricci, o modo projetivo não influencia as equações de campo para a métrica e, por essa razão, é possível estabelecer desde já que a torção é nula [12, 21]. Logo podemos expressar:

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) \ , \tag{2.9}$$

onde ∇ representa a derivada covariante com relação às conexões independentes. Substituindo a Eq. (2.9) em (2.7), para o último termo da integral (2.7) encontramos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} I_\Gamma &= \int d^4x\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}\right) \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

O integrando pode ser reescrito usando a definição de derivada covariante do produto, ou seja,

$$\nabla_\lambda\left[\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\right] = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) + \nabla_\lambda\left[\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right]\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.11}$$

e

$$\nabla_\nu\left[\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right] = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) + \nabla_\nu\left[\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right]\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) \ . \tag{2.12}$$

Substituindo as relações anteriores na Eq. (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} I_\Gamma &= \int d^4x\left[\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right] \qquad (2.13) \\ &+ \int d^4x\left[-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right)\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) + \nabla_\nu\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right)\right] \ . \end{aligned}$$

Redefinindo os índices e reorganizando os termos obtemos

$$I_\Gamma = \int d^4x\nabla_\lambda\sqrt{-g}J^\lambda + \int d^4x\left[-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) + \nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma\mu}\right)\delta^\nu_\lambda\right]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \ , \tag{2.14}$$

onde $J^\lambda \equiv f_{\mathcal{R}}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\beta_{\beta\mu}\right)$. Logo a primeira integral em (2.14) é um termo de superfície e, assumindo que se anula assintoticamente [22], temos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} + f_T\left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right) - \kappa^2T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\right. \qquad (2.15) \\ &\left. + \left(\left[-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) + \nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma\mu}\right)\delta^\nu_\lambda\right]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\right] \ . \end{aligned}$$

O segundo termo da integral, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\int d^4xH^{\mu\nu}_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \ . \tag{2.16}$$

Note que, $H^{\mu\nu}_\lambda$ não possui simetria nos índices $\mu\nu$. No entanto podemos escrevê-lo como $H^{\mu\nu}_\lambda = H^{(\mu\nu)}_\lambda + H^{[\mu\nu]}_\lambda$, de modo que

$$H^{(\mu\nu)}_\lambda = -\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) + \nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma(\mu}\right)\delta_\lambda^{\ n)} \tag{2.17}$$

e

$$H_{\lambda}^{[\mu\nu]} = \nabla_{\sigma}\left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma[\mu}\right)\delta_{\lambda}^{\nu]} \ . \tag{2.18}$$

Como $H_{\lambda}^{[\mu\nu]} = 0$, então o segundo termo da integral da Eq. (2.15), pode ser expresso como

$$\int d^4x \left[-\nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}\right) + \nabla_{\sigma}\left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma(\mu}\right)\delta_{l}^{\nu)}\right]\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \ . \tag{2.19}$$

Assim, a variação da ação (2.1) no formalismo de Palatini é

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} + f_T\left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right) - \kappa^2 T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\right. \\ &\quad \left. + \left(\left[-\nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}\right) + \nabla_{\sigma}\left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma(\mu}\right)\delta_{\lambda}^{\nu)}\right]\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.20}$$

A extremização requer $\delta\mathcal{S} = 0$ na equação anterior. Logo, da variação da ação (2.1) com relação à métrica $g^{\mu\nu}$ obtemos

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} + f_T\left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{2.21}$$

Tomando ainda traço da expressão anterior com a métrica, obtemos seguinte equação algébrica

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R} - 2f + f_T\left(T + \Theta\right) = \kappa^2 T \ . \tag{2.22}$$

Podemos ainda reescrever as eqs. (2.21) e (2.22) da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\left(\kappa^2 T_{\mu\nu} - f_T\left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right) + \frac{f}{2}g_{\mu\nu}\right) \tag{2.23}$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\left(\kappa^2 T - f_T\left(T + \Theta\right) + 2f\right) \ , \tag{2.24}$$

o que nos será útil mais adiante.

Agora que estamos de posse da equação de campo referente a métrica, vamos obter a equação de campo para as componentes da conexão, esta que pode ser facilmente obtida ao tomarmos o traço do segundo termo da eq. (2.20)

$$\nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}\right) = 0 \ . \tag{2.25}$$

Note que as equações de campo obtidas são equações de segunda ordem, ao contrário do que acontece quando é adotado o Formalismo Métrico que fornece equações com derivadas de quarta ordem da métrica $g_{\mu\nu}$. E apesar de o formalismo de Palatini nos dar duas equações de campo, uma para a métrica e uma outra para a conexão (o que aparentemente torna a teoria mais complicada de se resolver), diferente do que ocorre no formalismo métrico, este fato nos livra do surgimento de campos fantasmas que causam instabilidades para a teoria. Estes campos fantasmas são previstos pelo teorema de Ostrogradski [23], que afirma que teorias de ordens superiores não possuem um estado de mínima energia, podendo decair até estados infinitamente negativos [24]. Um outro fato curioso, é que a equação de campo para a conexão da Teoria $f(R,T)$ é exatamente igual à da Teoria $f(R)$.

2.2 A Equação da Conexão

Nosso objetivo agora é resolver a eq. (2.25), lembrando que é a eq. de campo para a conexão. Para isso, neste ponto, nos é oportuno inserir um novo objeto matemático, este que funcionará como uma métrica auxiliar

$$h_{\mu\nu} \equiv f_{\mathcal{R}} g_{\mu\nu} \ , \tag{2.26}$$

tal que $\nabla_\lambda \left(\sqrt{-h} h^{\mu\nu} \right) = 0$.

A equação da conexão implica que a conexão é o símbolo de Christoffel com relação à nova métrica [22]. Isto nos permite resolver diretamente a Eq. (2.22), cuja solução é a conexão de Levi-Civita. Portanto, as componentes da conexão em termos da nova métrica são

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu} \right) \ . \tag{2.27}$$

O tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ é expresso por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \frac{1}{f_{\mathcal{R}}^2} \nabla_\mu f_{\mathcal{R}} \nabla_\nu f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{f_{\mathcal{R}}} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Box \right) f_{\mathcal{R}} \ , \tag{2.28}$$

sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci da RG construído pelo símbolo de Christoffel. Tomando agora o traço da expressão (2.28) obtemos o escalar de Ricci

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{2 f_{\mathcal{R}}^2} \nabla_\mu f_{\mathcal{R}} \nabla^\mu f_{\mathcal{R}} - \frac{3}{f_{\mathcal{R}}} \Box f_{\mathcal{R}} \ . \tag{2.29}$$

Perceba que as eqs. (2.28) e (2.29) são iguais às obtidas para o caso da Teoria $f(R)$ [19].

Da RG, sabe-se que o Tensor de Einstein é expresso por:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 T_{\mu\nu} \ . \tag{2.30}$$

Agora, escrevendo as equações de campo da teoria $f(R,T)$ em termos do tensor de Einstein fazendo uso das eqs. (2.28) e (2.29). Assim

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \;&=\; \frac{\kappa^2}{f_{\mathcal{R}}} \left(T_{\mu\nu} - f_T \left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} \right) \right) - \frac{g_{\mu\nu}}{2 f_{\mathcal{R}}} \left[\kappa^2 T - f_T \left(T + \Theta \right) \right] - g_{\mu\nu} \frac{3f}{2 f_{\mathcal{R}}} \\ &+ \frac{1}{f_{\mathcal{R}}} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box \right) f_{\mathcal{R}} - \frac{3}{2 f_{\mathcal{R}}^2} \left[\nabla_\mu f_{\mathcal{R}} \nabla_\nu f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\nabla f_{\mathcal{R}} \right)^2 \right] \ , \end{aligned} \tag{2.31}$$

Claramente vemos que o lado da fonte foi alterado. No entanto, é possível observar que existe uma dependência da métrica $g_{\mu\nu}$ e também dos campos de matéria nos dois lados da Eq. (2.31), o que as tornam semelhantes as equações da RG.

3 Teoria $f(R,T)$ como uma Teoria *RBGs*

Neste capítulo, vamos considerar a lagrangiana gravitacional $\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma))$, que é construída a partir da métrica de espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ onde o seu determinante é dado por g, o tensor de Ricci simetrizado $R_{(\mu\nu)}(\Gamma)$, a partir da conexão afim $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, que é independente da métrica e do traço do tensor energia-momento T. Logo temos uma ação da seguinte forma:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma), T) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi_m)\right] \ , \tag{3.1}$$

onde a lagrangiana de matéria é expressa por $\mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi_m)$, em que ψ simboliza os campos de matéria que acoplam com a geometria apenas através da métrica $g_{\mu\nu}$.

O fato de não impormos *a priori* nenhuma estrutura definida para a conexão, diferente do caso da *RG*, onde se assume desde o início uma conexão do tipo Levi-Civita, implica que a princípio, em geral, deveremos levar em conta sua parte anti-simétrica, a torsão $S^{\alpha}_{\mu\nu}$. Veremos que as teorias *RBGs* resultam, por construção, independentes da torsão. E, por isto, poderemos deixá-la fora de consideração.

Para que isto fique mais claro, inicialmente tomamos a conexão em termos de suas partes simétrica $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ e anti-simétrica $S^{\alpha}_{\mu\nu}$. Assim

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = C^{\alpha}_{\mu\nu} + S^{\alpha}_{\mu\nu} \ . \tag{3.2}$$

3.1 Obtendo as Equações de campo

Para obtermos as equações de campo, realiza-se a variação da ação (3.1) [21], considerando as variações independentes em relação à métrica e à conexão. Assim:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left\{\delta\left[\sqrt{-g}\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma), T)\right]\right\} + \delta\mathcal{S}_m \\ &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left\{\left[\delta\sqrt{-g}\right]\mathcal{L}_G + \sqrt{-g}\left[\delta\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma), T)\right]\right\}\delta\mathcal{S}_m \ .\end{aligned} \tag{3.3}$$

Considerando as relações a seguir:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \ , \tag{3.4}$$

e também,

$$\delta\mathcal{L}_G\left(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}\left(\Gamma\right), T\right) = \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial R_{(\mu\nu)}\left(\Gamma\right)}\delta R_{(\mu\nu)}\left(\Gamma\right) + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial T}\delta T \ . \tag{3.5}$$

Substituindo os resultados (3.4) e (3.5) em (3.3), obtemos

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left\{\sqrt{-g}\left[\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2}g_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial R_{(\mu\nu)}(\Gamma)}\delta R_{(\mu\nu)}(\Gamma) + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial T}\delta T\right\} + \delta\mathcal{S}_m \ . \tag{3.6}$$

A variação do Tensor de Ricci é dada por:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \left(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) - \nabla_\nu \left(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\right) + 2S^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \ , \tag{3.7}$$

considerando ainda que $Z^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial R_{\mu\nu}}$.

Já, a variação do tensor energia-momento é

$$\delta T = \delta \left(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}\right) = \left(T_{\alpha\beta}\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} + \Theta_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} = \left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \ , \tag{3.8}$$

onde estamos definindo que

$$\Theta_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \ . \tag{3.9}$$

Assim, a Eq. (3.6) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} \ &= \ \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x \left\{\sqrt{-g}\left[\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2}g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial T}\left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right)\right]\delta g^{\mu\nu}\right. \\ &\left. + Z^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\right) + 2S^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\right]\right\} + \delta\mathcal{S}_m \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Neste instante, manipularemos apenas o segundo termo da integral (3.10). Desta forma, temos

$$I_\Gamma = \int d^4x\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\right) + 2S^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \ .\right] \tag{3.11}$$

Reorganizando os termos e considerando que $K^\lambda \equiv Z^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\beta}$, a Eq. (3.11) se torna

$$\begin{aligned} I_\Gamma \ &= \ \int d^4x \left\{\nabla_\lambda\left(K^\lambda\sqrt{-g}\right) - \delta\Gamma^\lambda_{\nu\beta}\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right)\right. \\ &\left. + \sqrt{-g}Z^{\mu\nu}_\alpha\left[-\nabla_\mu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\beta}\right) + 2S^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\beta}\right] \ .\right\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Trabalhando a expressão anterior e isolando o termo de fronteira, chegamos a

$$I_\Gamma = \int d^4x \left\{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}K^\lambda\right) - \nabla_\lambda\left[\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right) - 2S^\sigma_{\sigma\mu}\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right]\delta\Gamma^\lambda_{\nu\beta} \ .\right\} \tag{3.13}$$

Agora, substituindo este resultado na eq. (3.6)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} \ &= \ \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x \left\{\sqrt{-g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2}g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial T}\left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right)\right)\delta g^{\mu\nu} + 2\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}K^\lambda\right)\right. \\ &\left. + 2\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right) + S^\nu_{\sigma\rho}Z^{\sigma\rho} + 2S^\sigma_{\sigma\mu}Z^{\mu\nu}\right]\delta\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\right\} + \delta\mathcal{S}_m \ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Logo, as equações de campo assumem a seguinte forma

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} \ = \ \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2}g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial T}\left(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right) \tag{3.15}$$

$$\kappa^2 H_\alpha{}^{\nu\beta} \ = \ -\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right) + S^\nu_{\sigma\rho}Z^{\sigma\rho} + 2S^\sigma_{\sigma\mu}Z^{\mu\nu} \ . \tag{3.16}$$

O tensor Energia-Momento para os campos de matéria é dado por $T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$. O acoplamento de conexão-matéria é dado pelo tensor $H_\alpha{}^{\nu\beta}$, porém, vamos assumir que os campos de matéria não estejam acoplados à conexão. O objetivo de tal escolha é o de preservar o Princípio de Equivalência de Einstein e evitar instabilidades na teoria [25]. Consequentemente vamos ter ${H_{\alpha}}^{\nu\beta} = 0$. Assim a eq. (3.16) se torna

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right) + S^{\nu}_{\sigma\rho}Z^{\sigma\rho} + 2S^{\sigma}_{\sigma\mu}Z^{\mu\nu} \ . \tag{3.17}$$

Tomando a expressão (3.2), e considerando que a derivada covariante para um dado tensor qualquer V_ν é dado por

$$\nabla_{\mu}V_{\nu} = \partial_{\mu}V_{\nu} - C^{\alpha}_{\mu\nu}V_{\alpha} - S^{\alpha}_{\mu\nu}V_{\alpha} = \nabla^{C}_{\mu}V_{\nu} - S^{\alpha}_{\mu\nu}V_{\alpha} \ , \tag{3.18}$$

esta expressão nos permite reescrever a eq. (3.17) como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^{C}_{\lambda}\left(\sqrt{-g}Z^{[\mu\nu]}\right) = S^{\lambda}_{\mu\alpha}Z^{[\mu\nu]} - S^{\beta}_{\mu\lambda}Z^{[\mu\nu]} \ . \tag{3.19}$$

Esta relação é responsável por permitir que possamos trabalhar, tanto para o caso em que matéria esteja acoplada à conexão [21, 26], quanto para o caso em que não tenha acoplamento entre conexão e matéria.

Associando um tensor de Kronecker δ^{μ}_{α} ao tensor $Z^{\beta\nu}$. Desta forma a eq. anterior pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^{C}_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\delta^{\mu}_{\alpha}Z^{[\beta\nu]}\right) = S^{\lambda}_{\mu\alpha}\delta^{\mu}_{\lambda}Z^{[\beta\nu]} - S^{\beta}_{\mu\lambda}\delta^{\mu}_{\alpha}Z^{[\lambda\nu]} \ . \tag{3.20}$$

Agora, calculando o traço para $\mu\alpha$ e, depois de efetuar algumas manipulações, chegamos a

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^{C}_{\mu}\left(\sqrt{-g}Z^{\beta\nu}\right) = S^{\nu}_{\alpha\lambda}Z^{[\beta\lambda]} - S^{\beta}_{\alpha\lambda}Z^{[\nu\lambda]} - S^{\lambda}_{\alpha\lambda}Z^{\beta\nu} + \frac{S^{\sigma}_{\lambda\sigma}}{3}\left(\delta^{\nu}_{\alpha}Z^{\beta\lambda} - \delta^{\beta}_{\alpha}Z^{\nu\lambda}\right) \ . \tag{3.21}$$

A partir da eq. anterior, podemos sugerir uma descrição alternativa para a conexão, que será expressa em termos de uma nova variável $\tilde{\Gamma}$. Estamos propondo essa nova conexão pois buscamos obter o tensor de Ricci simetrizado. Considerando a torsão, a parte simétrica de $\tilde{\Gamma}$ irá se relacionar com Γ, da seguinte forma:

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(\delta^{\lambda}_{\nu}S^{\sigma}_{\sigma\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu}S^{\sigma}_{\sigma\nu}\right) \tag{3.22}$$

Onde, definindo que $\tilde{S}^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$, tal que:

$$\tilde{C}^{\lambda}_{\mu\nu} = C^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\left(\delta^{\lambda}_{\nu}S^{\sigma}_{\sigma\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu}S^{\sigma}_{\sigma\nu}\right) \tag{3.23}$$

e

$$\tilde{S}^{\lambda}_{\mu\nu} = S^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\left(\delta^{\lambda}_{\nu}S^{\sigma}_{\sigma\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu}S^{\sigma}_{\sigma\nu}\right) \tag{3.24}$$

assumindo as propriedades de simetria da conexão $\tilde{\Gamma}$, na Eq. (3.21), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^{\tilde{C}}_{\mu}\left(\sqrt{-g}Z^{\beta\nu}\right) &= \left(\tilde{S}^{\nu}_{\alpha\lambda}g^{\beta\kappa} - \tilde{S}^{\beta}_{\alpha\lambda}g^{\lambda\kappa}\right)g^{\lambda\rho}Z_{\kappa\rho} + \tfrac{2}{3}\delta^{\lambda}_{\lambda}S^{\sigma}_{\sigma\alpha}\left(g^{\beta\nu} - g^{\nu\beta}\right)\left(g^{\kappa\rho} - g^{\rho\kappa}\right)Z_{\kappa\rho} \\ &= \left(\tilde{S}^{\nu}_{\alpha\lambda}g^{\beta\kappa} - \tilde{S}^{\beta}_{\alpha\lambda}g^{\lambda\kappa}\right)g^{\lambda\rho}Z_{\kappa\rho} \ .\end{aligned} \tag{3.25}$$

Como estamos considerando o tensor de Ricci simétrico, então $Z_{\kappa\rho} = 0$ e, também a torsão $\tilde{S}^{\lambda}_{\mu\nu}$ é nula. Assim, $\nabla^{\tilde{C}}_{\mu} \to \nabla^{\Gamma}_{\mu} = \nabla^{C}_{\mu}$, portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^{\Gamma}_{\mu}\left(\sqrt{-g}Z^{\beta\nu}\right) = 0 \tag{3.26}$$

que implica a dependência da conexão com a derivada.

3.2 Métrica auxiliar e matriz de deformação

Vamos agora, vincular um tensor simétrico $q_{\mu\nu}$, tal que

$$\sqrt{-g}\, g^{\beta\lambda} Z^{\nu}_{\lambda} = \sqrt{-q}\, q^{\beta\nu} \ . \tag{3.27}$$

A relação se reduz a uma equação de compatibilidade para $q_{\mu\nu}$, que vai atuar como uma métrica auxiliar

$$\nabla_{\mu}\left(\sqrt{-q}\, q^{\beta\nu}\right) = 0 \ . \tag{3.28}$$

Portanto, poderemos agora escrever as componentes da conexão Γ, como os símbolos de Christoffel em termos da métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{q^{\lambda\alpha}}{2}\left(\nabla^{\tilde{C}}_{\mu} q_{\nu\alpha} + \nabla^{\tilde{C}}_{\nu} q_{\mu\alpha} - \nabla^{\tilde{C}}_{a} q_{\mu\nu}\right) \ . \tag{3.29}$$

Introduzimos agora, uma matriz de deformação Ω, que será incumbida de associar a métrica de espaço tempo $g_{\mu\nu}$ com a métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ algebricamente da seguinte maneira:

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Omega^{\alpha}_{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad q^{\mu\nu} = \left(\Omega^{-1}\right)^{\mu}_{\alpha} g^{\alpha\nu} \ . \tag{3.30}$$

Vale salientar que, como veremos adiante, $\Omega^{\alpha}{}_{\nu}$ é determinada pelo conteúdo de matéria, através do tensor de energia-momento.

A matriz $\hat{\Omega}$, em conjunto com a relação acima, nos permite reformular a definição da equação da métrica auxiliar dada pela expressão (3.27). Logo, obtemos

$$\sqrt{-q}q^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}\Omega^{\nu}_{\alpha} \ . \tag{3.31}$$

A partir deste resultado podemos expressar o tensor de Riemann em termos da métrica auxiliar

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}\left(\tilde{C}\right) + \nabla^{\tilde{C}}_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \nabla^{\tilde{C}}_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} \ . \tag{3.32}$$

Tendo o tensor de Riemann, tomando seu traço obtemos o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}\left(\tilde{C}\right) + \nabla^{\tilde{C}}_{[\mu}\Gamma_{\nu]} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \ . \tag{3.33}$$

Finalmente, é possível esboçar o tensor de Einstein, para obter as equações com um aspecto equivalente às da Relatividade Geral,

$$G^{\mu}{}_{\nu}(q) = \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[T^{\mu}_{\ \nu} - \mathcal{L}_{G_T} \left(T^{\mu}_{\ \nu} + \Theta^{\mu}{}_{\nu} \right) - \left(\mathcal{L}_G + \frac{T}{2} - \mathcal{L}_{G_T} \left(T + \Theta \right) \right) \delta^{\nu}_{\mu} \right] , \tag{3.34}$$

onde estamos considerando que $\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial T} \equiv \mathcal{L}_{G_T}$.

Perceba que o tensor de Einstein obtido está em função da métrica auxiliar q. É importante agora eliminar a dependência existente entre a métrica g com L_G , $T_{\mu\nu}$ e $\hat{\Omega}$, de tal maneira que o lado direito da eq. (3.34) possa agora ser interpretado como um tensor energia-momento de um outro campo escalar acoplado à gravidade descrita pela métrica auxiliar. Deste modo, estabelecendo a dependência com que q, vemos que

$$\tilde{T}^{\mu}_{\ \nu}(q) \equiv q^{\mu\alpha} \tilde{T}_{\alpha\nu} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[T^{\mu}_{\ \nu} - \mathcal{L}_{G_T} \left(T^{\mu}_{\ \nu} + \Theta^{\mu}{}_{\nu} \right) - \left(\mathcal{L}_G + \frac{T}{2} - \mathcal{L}_{G_T} \left(T + \Theta \right) \right) \delta^{\nu}_{\mu} \right] . \tag{3.35}$$

Com isso temos

$$G^{\mu}{}_{\nu}(q) = \tilde{T}^{\mu}_{\ \nu} , \tag{3.36}$$

o que deve satisfazer a identidade de Bianch.

Como mostrado no capítulo anterior, a inclusão do termo T, que representa o traço do tensor energia momento, na lagrangiana gravitacional modifica apenas a eq. de campo referente a métrica, já a eq. de campo para a conexão é igual à que se obtém quando tratamos o caso geral para uma teoria em que a lagrangiana gravitacional tenha dependência apenas de $g_{\mu\nu}$ e $R_{(\mu\nu)}(\Gamma)$

No capítulo que vem a seguir, será apresentado o método de mapeamento, que consiste em um mecanismo algébrico eficaz capaz de realizar um mapeamento entre as teorias *RBGs* e a Relatividade Geral.

4 Mapeamento entre a Teoria *RBGs* e a *RG*

Neste capítulo, abordaremos o método de mapeamento entre as Teorias *RBGs* e a *RG*, que consegue relacionar as equações e soluções entre as teorias. Este procedimento foi apresentado pela primeira vez em [27]. Esta técnica é uma formulação algébrica capaz de mapear as equações de campo de teorias métrico-afins de gravidade não lineares (da classe RBG), acopladas à matéria descrita por uma determinada lagrangiana, às equações de campo da RG acopladas a uma lagrangiana descrevendo o mesmo tipo de matéria porém, com uma estrutura (dinâmica) diferente [28].

Uma serventia virtuosa deste procedimento é que ele nos possibilita utilizar os métodos e resultados bem definidos no cenário da RG, para solucionar sistemas das *RBGs* que, devido ao fato de serem fortemente não lineares, possuem uma dificuldade muito maior [27].

Caso o leitor esteja interessado em ver detalhes e aplicações deste procedimento para o caso da teoria $f(R)$ e para a teoria *EiBI* pode ser feita uma consulta nas seguintes referências [29, 28, 27, 30, 31, 19, 32, 26]. Recentemente também este método foi estendido para o caso $f(R,Q)$ onde $Q = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ [33].

Neste capítulo então, dividiremos nossos esforços em estender o método de mapeamento para Teoria $f(R,T)$, onde inicialmente obteremos as relações de mapeamento para o caso geral onde é considerado matéria escalar como fonte e, logo depois, mostraremos que o procedimento pode ser estendido de forma extremamente clara para o caso em que a fonte é caraterizada por um fluido anisotrópico.

4.1 O mapeamento com matéria escalar

Como dito anteriormente iremos apresentar um caso geral do método de mapeamento entre as teorias *RBGs* e a *RG*, onde iremos considerar campos escalares. Apesar deste ser o tipo mais simples de matéria, desempenham, por um lado, um papel importante na cosmologia inflacionária, e em modelos de Energia Escura.

Considera-se uma teoria de gravidade $\mathcal{L}_G$ arbitrária, que esteja acoplada a um campo escalar real com ação genérica não canônica $P(X)$, descrita pela seguinte ação:

$$\mathcal{S}_m(X,\phi) = -\frac{1}{2}\int d^4\sqrt{-g}P\left(X,\phi\right) \tag{4.1}$$

onde $X = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$, que é responsável por descrever a dinâmica dos campos escalares. E P é uma função escalar arbitrária de seus argumentos. Fazendo a variação da expressão anterior

$$\delta\mathcal{S}_m(X,\phi) = -\frac{1}{2}\int d^4\left(\delta\sqrt{-g}\right)P\left(X,\phi\right) + \left(\delta P\left(X,\phi\right)\right)\sqrt{-g} \tag{4.2}$$

lembrando que a variação de $\sqrt{-g}$ é dada por

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

e a variação da função $P\left(X,\phi\right)$ é

$$\delta P\left(X,\phi\right) = \frac{\partial P}{\partial X}\delta X + \frac{\partial P}{\partial \phi}\delta\phi = P_X\delta X \tag{4.4}$$

onde estamos considerando $P_X \equiv dP/dX$. Agora, substituindo as expressões (4.3) e (4.4) em (4.2), chagamos a

$$\delta\mathcal{S}_m(X,\phi) = -\frac{1}{2}\int d^4\left\{\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right]P\left(X,\phi\right) + P_X\delta X\sqrt{-g}\right\} . \tag{4.5}$$

Manipulando a expressão anterior, obtemos

$$\delta\mathcal{S}_m(X,\phi) = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\nu}g_{\alpha\nu}\left\{P_X g^{\alpha\nu}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi - \frac{P\left(X,\phi\right)}{2}\right\} . \tag{4.6}$$

Logo, o tensor energia-momento é dado por:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = P_X g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi - \frac{P\left(X,\phi\right)}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} . \tag{4.7}$$

Ou ainda, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte maneira

$$T^{\mu}{}_{\nu} = P_X X^{\mu}_{\nu} - \frac{P\left(X,\phi\right)}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} , \tag{4.8}$$

considerando que $X^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi$ e, portanto, $X = X^{\alpha}_{\alpha}$ é seu traço.

Podemos realizar uma expansão de $\hat{\Omega}$ em série de potência do tensor energia-momento

$$\Omega^{\alpha}{}_{\nu} = a_0\left(X,\phi\right)\delta^{\mu}{}_{\nu} + a_1\left(X_1,\phi\right)T^{\mu}{}_{\nu} + a_2\left(X_2,\phi\right)T^{\mu}{}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\nu} + \cdots \tag{4.9}$$

Esta é uma maneira bastante propícia para expressar o tensor energia-momento, pois podemos expressá-lo como potências de X. Um fato importante em se ter esta relação está ligada aos campos de matéria.

Agora, com o intuito de simplificar a expansão anterior, tomemos a eq. (4.8). Assim, $\Omega^{\alpha}{}_{\nu}$, deve apresentar a forma

$$\Omega^{\alpha}{}_{\nu} = C\left(X,\phi\right)\delta^{\mu}{}_{\nu} + D\left(X,\phi\right)X^{\mu}{}_{\nu} \tag{4.10}$$

onde as funções $C\left(X,\phi\right)$ e $D\left(X,\phi\right)$ são dependentes do modelo de gravidade estudado.

Devido à estrutura que a equação (4.10) apresenta, é permitido mostrar que a dependência que existe do lado direito da equação (3.34) em $g^{\mu\nu}$, pode ser eliminada em favor dos campos de matéria e de $q^{\mu\nu}$. Note então que, pela relação (3.30), temos que:

$$g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi = q^{\mu\beta}\Omega^{\alpha}_{\beta}\partial_\alpha\phi = q^{\mu\beta}\left(C\delta^{a}_{\beta} + DX^{\alpha}_{\beta}\right)\partial_\alpha\phi = \left(C + DX\right)q^{\mu\beta}\partial_\beta\phi . \tag{4.11}$$

Então, podemos escrever

$$X^{\mu}_{\nu} = (C + DX)\, Y^{\mu}_{\nu}, \tag{4.12}$$

e, consequentemente

$$Y = \frac{X}{C + DX} \; . \tag{4.13}$$

Lembrando que $Y^{\mu}_{\nu} = q^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\nu}\phi$ e $Y \equiv Y^{\mu}_{\mu}$, considerando esta função $Y = Y(X, \phi)$ podemos obter uma relação inversa. Desta maneira, os termos dependentes da métrica $g_{\mu\nu}$ do lado direito da equação (3.34) podem ser expressos em termos da métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$. Isso permite uma interpretação de $\tilde{T}_{\mu\nu}$ como um tensor Energia-Momento real dos campos de matéria no espaço-tempo relacionado com $q_{\mu\nu}$ [28]. Logo, podemos assumir a existência de um modelo de campo escalar descrito por uma ação:

$$\tilde{\mathcal{S}}_m (Y, \phi) = -\frac{1}{2}\int d^4\sqrt{-q}K(Y, \phi)\,, \tag{4.14}$$

realizando a variação da expressão anterior, obtemos uma expressão para o tensor energia momento

$$\tilde{T}^{\mu}{}_{\nu} = K_Y Y^{\mu}{}_{\nu} - \frac{K(Y, \phi)}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} \; . \tag{4.15}$$

Onde, temos também um Tensor Energia-Momento associando $\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = K_Y Y^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\tilde{K}(Y, \phi)$. Assim, para o mapeamento entre as Teorias *RBGs* acopladas a um campo de matéria escalar e a *RG* acoplada a um outro campo escalar, devemos solucionar a Eq. (3.35). Consideremos as seguintes relações:

$$K_Y Y^{\mu}_{\nu} \;=\; \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} P_X X^{\mu}_{\nu} - \mathcal{L}_{G_T}\left(P_X X^{\mu}_{\nu} + \Theta_{\mu\nu}\right) \;, \tag{4.16}$$

$$K(Y, \phi) \;=\; \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left(2\mathcal{L}_G + XP_X - P - \mathcal{L}_{G_T}\left(2XP_X - 5P + 2\Theta\right)\right) \; . \tag{4.17}$$

Substituindo as relações (4.16) e (4.17) na eq. (4.15), obtemos

$$\tilde{T}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[P_X X^{\mu}{}_{\nu} - \mathcal{L}_{G_T}\left(P_X X^{\mu}{}_{\nu} + \Theta^{\mu}{}_{\nu}\right) - \mathcal{L}_G + \frac{XP_X - P}{2} - \mathcal{L}_{G_T}\left(XP_X - \frac{5P}{2} + 2\Theta\right)\delta^{\mu}{}_{\nu}\right] \; . \tag{4.18}$$

Perceba também que o traço da eq. (4.12) combinado com a eq. (4.16) nos dá

$$K_Y = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} P_X (C + DX) - \mathcal{L}_{G_T}\left[P_X (C + DX) + \Theta^{\mu}{}_{\nu}\right]. \tag{4.19}$$

Finalmente, para estabelecer o mapeamento de maneira adequada entre teorias acopladas à matéria escalar, é necessário verificar se a solução é compatível com as equações de evolução dos campos escalares, que surgem da variação de matéria em relação ao campo escalar e pode ser escrita de duas maneiras equivalentes, que são:

$$\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}P_X g^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\phi\right) - \sqrt{-g}\frac{P_{\phi}}{2} \;=\; 0 \;, \tag{4.20}$$

$$\partial_{\mu}\left(\sqrt{-q}K_Z q^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\phi\right) - \sqrt{-q}\frac{K_{\phi}}{2} \;=\; 0 \; . \tag{4.21}$$

Agora, considerando o determinante da eq. (3.30) e o traço das eqs. (4.12) e (4.16), encontramos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} P_X g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi &= \sqrt{-q} \left(C + DX\right) K_Y q^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \\ &= \sqrt{-q} K_Y q^{\mu\alpha} \partial_{\ a} \phi \ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

A partir deste resultado, e comparando as eqs. (4.20) e (4.21), chegamos a:

$$K_\phi = \frac{P_\phi}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \tag{4.23}$$

onde, $K_\phi \equiv \partial_\phi K\left(Y, \phi\right)$ e $P_\phi \equiv \partial_\phi P\left(X, \phi\right)$.

Finalmente, note que o conjunto de eqs. (4.16), (4.17) e (4.23) são as eqs. responsáveis em formar o sistema de equações referentes ao mapeamento quando se considera um campo escalar.

4.2 O mapeamento com fluidos anisotrópicos

Na seção anterior, mostramos o caso geral do método de mapeamento para *RGBs* acopladas a matéria escalar, e obtivemos equações explícitas, a partir da relação entre os correspondentes tensores de energia-momento.

Independente dos campos de matéria, essa relação pode ser aplicada também ao caso em que a matéria considerada pode ser interpretada como um fluido. Nesse caso, podemos partir diretamente das equações que relacionam $T_{\mu\nu}$ e $\tilde{T}_{\mu\nu}$. No intuito de manter o problema o mais geral possível, consideraremos um fluido anisotrópico, descrito por um tensor energia-momento com a forma[34]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p_\perp) U^\mu U^\nu + p_\perp g^{\mu\nu} + (p_r - p_\perp) \chi^\mu \chi^\nu \ , \tag{4.24}$$

onde $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$ e $g_{\mu\nu} \chi^\mu \chi^\nu = 1$ são vetores unitários temporal e espacial, respectivamente; ρ representa a densidade de energia, e p_r e $p_\perp$ são as pressões radial e transversal (a χ^μ) (um fluido perfeito é o caso particular em que $p_r = p_\perp$). Contraindo a eq. (4.24) com a métrica $g^{\mu\nu}$, obtemos

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p_\perp) U^\mu U_\nu + p_\perp \delta^\mu{}_\nu + (p_r - p_\perp) \chi^\mu \chi_\nu \ , \tag{4.25}$$

e seu traço é dado por:

$$T = \rho - p_r - 2 p_\perp \tag{4.26}$$

Nas coordenadas adaptadas ao fluido (comóveis), o tensor energia-momento (4.24) fica diagonal:

$$T^{\mu\nu} = diag(-\rho, p_r, p_\perp, p_\perp). \tag{4.27}$$

Este resultado nos será bastante útil mais adiante.

Para podermos utilizar o método de mapeamento neste caso, precisamos compor a estrutura algébrica compatível com a do fluido anisotrópico em questão. Propomos então o seguinte ansatz para a matriz de deformação da eq. (3.30) que tem a forma

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = \alpha\delta^{\mu}{}_{\nu} + \beta U^{\mu}U_{\nu} + \gamma\chi^{\mu}\chi_{\nu} \ . \tag{4.28}$$

onde os coeficientes α, β e γ são funções de ρ, p_r e $p_{\perp}$.

As expressões explícitas das funções (α, β, γ) só pode ser especificado uma vez que um determinado modelo RBG seja escolhido. Esta forma para a matriz Ω^{μ}_{ν} é natural dado que está associada a uma função não linear de T^{μ}_{ν}. De fato, uma expansão em série de potências de Ω^{μ}_{ν} em termos de T^{μ}_{ν} leva à estrutura (4.28) devido à ortogonalidade dos vetores U^{μ} e χ^{ν} , que impede a existência de termos cruzados [29].

Substituindo então as eqs. (4.25) e (4.26) no tensor de Einstein expresso pela eq. (3.34), obtemos

$$\begin{aligned} G^{\mu}_{\nu}(q) \quad = \quad & \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[(\rho+p_{\perp})\,U^{\mu}U_{\nu} + (p_r - p_{\perp})\,\chi^{\mu}\chi_{\nu} + \mathcal{L}_{G_T}\left[(\rho+p_{\perp})\,U^{\mu}U_{\nu}\right.\right. \\ & \left.\left. + (p_r-p_{\perp})\,\chi^{\mu}\chi_{\nu} + \Theta^{\mu}{}_{\nu}\right] + \left(\frac{\rho-p_r}{2} - \mathcal{L}_G - \mathcal{L}_{G_T}\left(\rho - p_r + \Theta\right)\right)\delta^{\mu}_{\nu}\right] \ . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Neste ponto, iremos considerar um novo fluido, este acoplado a RG, com o objetivo de explorar as possíveis correspondências entre as variáveis em termos da métrica q e as variáveis da métrica g. Para identificá-las, as densidades de energia, e as pressões radiais e tangenciais dadas em termos da métrica q, serão denotadas segundo: ρ^q, p^q_r e $p^q_{\perp}$. Assim, o tensor energia-momento em termos da métrica q, é expresso na forma

$$\bar{T}^{\mu}{}_{\nu} = (\rho^q + p^q_{\perp})V^{\mu}V_{\nu} + p^q_{\perp}\delta^{\mu}{}_{\nu} + (p^q_r - p^q_{\perp})\xi^{\mu}\xi_{\nu} \ , \tag{4.30}$$

Agora, considerando que

$$G^{\mu}_{\nu}(q) = k^2\bar{T}^{\mu}_{\nu}(q) \tag{4.31}$$

substituindo (4.29) e (4.30) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[(\rho+p_{\perp})\,U^{\mu}U_{\nu} + (p_r-p_{\perp})\,\chi^{\mu}\chi_{\nu} + \mathcal{L}_{G_T}\left[(\rho+p_{\perp})\,U^{\mu}U_{\nu} + (p_r-p_{\perp})\,\chi^{\mu}\chi_{\nu} + \Theta^{\mu}{}_{\nu}\right]\right. \\ & \left. + \left(\frac{\rho-p_r}{2} - \mathcal{L}_G - \mathcal{L}_{G_T}\left(\rho-p_r+\Theta\right)\right)\delta^{\mu}_{\nu}\right] = k^2(\rho^q + p^q_{\perp})V^{\mu}V_{\nu} + p^q_{\perp}\delta^{\mu}{}_{\nu} + (p^q_r - p^q_{\perp})\xi^{\mu}\xi_{\nu} \ , \end{aligned} \tag{4.32}$$

o que, assumindo as relações $U^{\mu}U_{\nu} = V^{\mu}V_{\nu}$ e $\chi^{\mu}\chi_{\nu} = \xi^{\mu}\xi_{\nu}$, nos leva em

$$p^q_{\perp} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[\frac{\rho - p_r}{2} - \mathcal{L}_G - \mathcal{L}_{G_T}\left(\rho - p_r + \Theta\right) - \mathcal{L}_{G_T}\left(\Theta^{\mu}{}_{\nu}\right)\right] \tag{4.33}$$

$$\rho^q + p^q_{\perp} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[\rho + p_{\perp} + \mathcal{L}_{G_T}\left(\rho + p_r\right) + \mathcal{L}_{G_T}\left(\Theta^{\mu}{}_{\nu}\right)\right] \tag{4.34}$$

$$p^q_r - p^q_{\perp} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[p_r - p_{\perp} + \mathcal{L}_{G_T}\left(p_r - p_{\perp}\right) + \mathcal{L}_{G_T}\left(\Theta^{\mu}{}_{\nu}\right)\right]. \tag{4.35}$$

Esse sistema de três equações é responsável por fornecer a correspondência entre os dois conjuntos de escalares expressos por: $\{\rho, p_r, p_{\perp}\}$ e $\{\rho^q, p^q_r, p^q_{\perp}\}$. Esta correspondência nos permitirá, uma vez definida a Lagrangiana gravitacional $\mathcal{L}_G$ da *RGB* que formos estudar, escrever a matriz $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$ da eq. (4.28) em termos das soluções encontradas na *RG*.

Os resultados apresentados ao decorrer deste capítulo, são obtidos pela primeira vez na literatura para a teoria $f(R,T)$, embora já tenho sido feito para outras teorias conforme as referências [27, 33] apresentadas no inicio deste capítulo. Nota-se que como no caso das equações de campo, as relações de mapeamento para a teoria $f(R,T)$ possuem uma certa semelhança com as obtidas no caso $f(R)$, porém com uma dependência extra dos termos dependentes de T.

5 Conclusões

Neste trabalho apresentamos a classe de Teoria $f\,(R, T)$ formulada "*à lá Palatini*", onde obtemos suas equações de campo. Uma vantagem de se utilizar tal formalismo é que as equações de campo são de segunda ordem na métrica. Diferente do que acontece quando fazemos uso do formalismo métrico, onde temos apenas uma equação de campo e esta é de quarta ordem na métrica que traz problemas para esta teoria, como o surgimento de campos fantasmas. Um outro ponto importante quando se trabalha com o formalismo de Palatini é que a conexão é gerada por uma métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$.

No capítulo seguinte, propomos um caso geral para a classe de teorias *RBGs* onde fizemos a inclusão do traço do tensor energia-momento. Também foi demonstrado que as equações de campo possuem uma estrutura semelhante tanto à da Relatividade, quanto à da teoria $f(R)$, porém em termos de uma métrica auxiliar. E o tensor energia-momento em que a matéria é acoplada à métrica auxiliar, reproduz exatamente a estrutura da equação de Einstein da *RG*.

De posse dos resultados que foram obtidos para o caso geral da teorias *RBGs*, foi possível extender o método de mapeamento, este que é responsável por levar as soluções das teorias *RBGs* para a *RG* e vice-versa. Este procedimento só é possível, graças às características presentes nas equações de campo das teorias *RBGs*. Para mostrar o funcionamento deste método, consideramos o caso para um único campo escalar descrito por lagrangianas canônica, para assim obter as equações gerais do mapeamento neste caso. E também mostramos que este procedimento pode ser estendido ao caso de se considerar que a matéria acoplada seja um fluido anisotrópico.

Uma particularidade muito interessante do procedimento que aqui foi descrito, além de proporcionar uma obtenção direta de soluções para teorias fortemente não lineares o que possibilita que essas teorias e soluções possam ganhar uma nova compreensão. Soluções dentro do contexto da *RG* para sistemas gravidade (*RG*) com matéria "exótica" possam ser tratadas no contexto das *RBGs* como sistemas de gravidade (*RBGs*) com matéria "normal". o que nos faz supor que possivelmente a explicação para alguns problemas que ainda estão em aberto possam estar realmente relacionado a uma reformulação da gravidade.

O mais estimulante em se trabalhar com o formalismo métrico-afim é que ele possibilita a obtenção novos objetos, desenvolver novas teorias e encontrar novas maneiras de mapear. Dito isto, na fase atual da pesquisa, estamos trabalhando com a aplicação dos resultados obtidos até aqui, tanto para o caso onde consideramos um campo escalar, quanto para o caso onde é considerado fluídos anisotrópicos.

Nosso objetivos futuros inicialmente são: poder verificar se como no caso da teoria

$f(R)$ é possível ir e voltar de uma teoria para a outra, ou seja, trazer soluções encontradas na RG para teorias RBGs e vise-versa. Em seguida explorar novos resultados dentro do cenários de objetos compactos.

Por fim, fica evidente que o procedimento descrito ao longo deste trabalho permitirá em um futuro próximo aprimorar as diversas aplicações dentro do cenário da astrofísica e cosmologia, podendo assim, abrir uma nova porta para abordar problemas no cenário destes campos, que antes eram inacessíveis devido à dificuldade de se resolver explicitamente as equações de campo. A partir disto, as soluções regulares, ondas gravitacionais, assinaturas de objetos compactos sem horizonte, configurações cosmológicas menos simétricas e assim por diante, nas teorias *RBGs*, agora poderão ser abordadas a partir de uma nova perspectiva fazendo uso da capacidade total dos métodos analíticos e, também numéricos desenvolvidos presentes no cenário da *RG*.

Referências

1 DRAKOS, N. *The Evolution of Dark Matter Haloes in Mergers*. Tese (Doutorado) — Waterloo U., 2019.

2 VEIGA, C.; OTHERS. Cosmologia: Da Origem ao fim do universo. *Rio de Janeiro: Observatório Nacional*, 2015.

3 RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107154834.

4 DODELSON, S.; 1941-1969)., A. P. L. . *Modern Cosmology*. [S.l.]: Elsevier Science, 2003. ISBN 9780122191411.

5 LóPEZ-CORREDOIRA, M. Problems with the dark matter and dark energy hypotheses, and alternative ideas. In: *Cosmology on Small Scales 2018: Dark Matter Problem and Selected Controversies in Cosmology Prague, Czech Republic, September 26-29, 2018*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 126–138.

6 ALCANIZ, J. S. Dark energy and some alternatives: a brief overview. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 36, n. 4A, p. 1109–1117, 2006.

7 LOMBRISER, L. On the cosmological constant problem. *Physics Letters B*, v. 797, p. 134804, 2019. ISSN 0370-2693.

8 BANADOS, M.; FERREIRA, P. G. Eddington's theory of gravity and its progeny. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 011101, 2010. [Erratum: Phys.Rev.Lett. 113, 119901 (2014)].

9 ESCAMILLA-RIVERA, C.; BANADOS, M.; FERREIRA, P. G. A tensor instability in the Eddington inspired Born-Infeld Theory of Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 087302, 2012.

10 JIMENEZ, J. B. et al. Born–Infeld inspired modifications of gravity. *Phys. Rept.*, v. 727, p. 1–129, 2018.

11 NASCIMENTO, J. et al. Nonlinear σ-models in the Eddington-inspired Born-Infeld Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 6, p. 064043, 2020.

12 OLMO, G. J. Palatini Approach to Modified Gravity: f(R) Theories and Beyond. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 20, p. 413–462, 2011.

13 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. f(R) theories. *Living Rev. Rel.*, v. 13, p. 3, 2010.

14 HARKO, T. et al. $f(r,t)$ gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 84, p. 024020, Jul 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.024020>.

15 ROSA, J. a. L.; RUBIERA-GARCIA, D. Junction conditions of Palatini f(R,T) gravity. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 6, p. 064007, 2022.

16 BARRIENTOS, E. et al. Metric-affine f(R,T) theories of gravity and their applications. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 10, p. 104041, 2018.

17 SHABANI, H.; MORAES, P. H. R. S. The galaxy rotation curves in the $f(R,T)$ modified gravity formalism. 6 2022.

18 FARIAS, I. S.; MORAES, P. H. R. S. Cosmography of the $f(R,T)$ gravity theory. 8 2021.

19 JúNIOR, J. G. de L. Dissertação (Mestrado em Física), *Teorias RBGs com eletrodinâmica não linear por mapeamento à relatividade geral*. Paraíba, Brasil: [s.n.], 2021.

20 WU, J. et al. Palatini formulation of $f(R,T)$ gravity theory, and its cosmological implications. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 5, p. 430, 2018.

21 AFONSO, V. I. et al. The trivial role of torsion in projective invariant theories of gravity with non-minimally coupled matter fields. *Class. Quant. Grav.*, v. 34, n. 23, p. 235003, 2017.

22 OLIVEIRA, T. B. R. de F. *Teorias f(R) de gravidade na formulação de Palatini.*

23 OSTROGRADSKY, M. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersbourg*, v. 6, n. 4, p. 385–517, 1850.

24 BACHEGA, R. R. A. *Investigação da física do setor escuro com ondas gravitacionais.* Tese (Doutorado) — U. Sao Paulo (main), 2019.

25 JIMÉNEZ, J. B.; DELHOM, A. Instabilities in metric-affine theories of gravity with higher order curvature terms. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 6, p. 585, 2020.

26 SILVA, J. J. D. P. da. Dissertação (Mestrado em Física), *Dinâmica métrico-afim em gravidade modificada – soluções exatas via correspondência RBG-RG*. Paraíba, Brasil: [s.n.], 2021.

27 AFONSO, V. I.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Mapping Ricci-based theories of gravity into general relativity. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 2, p. 021503, 2018.

28 AFONSO, V. I. et al. Correspondence between modified gravity and general relativity with scalar fields. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 4, p. 044040, 2019.

29 AFONSO, V. I. et al. Mapping nonlinear gravity into General Relativity with nonlinear electrodynamics. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 10, p. 866, 2018.

30 AFONSO, V. I. Compact scalar field solutions in EiBI gravity. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 29, n. 11, p. 2041011, 2020.

31 AFONSO, V. I. et al. New scalar compact objects in Ricci-based gravity theories. *JCAP*, v. 12, p. 044, 2019.

32 ORDONHO, R. F. Dissertação (Mestrado em Física), *Mapeamento de teorias RGBs: o caso da gravidade EiBl com campo escalar*. Paraíba, Brasil: [s.n.], 2021.

33 AES, R. B. M.; CRISPINO, L. C. B.; OLMO, G. J. Compact objects in quadratic Palatini gravity generated by a free scalar field. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 6, p. 064007, 2022.

34 SANTOS, R. F. d.; JÚNIOR, A. C. A. d. F.; ULHOA, S. C. Hidrodinâmica relativística: a representação de diversos fluidos em relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, 2020.