UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS DIADEMA

Elias Brito Alves Junior

É possível distinguir a Relatividade Geral da Gravidade Unimodular ao nível quântico?

Diadema
2022

Elias Brito Alves Junior

É possível distinguir a Relatividade Geral da Gravidade Unimodular ao nível quântico?

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de Especialista em Teoria da Relatividade, ao Programa de Pós-Graduação Lato Sensu do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

Universidade Federal de São Paulo

Campus Diadema

Especialização em Teoria da Relatividade

Orientador: Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

Diadema

2022

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Alves Junior, Elias Brito
É possível distinguir a Relatividade Geral da Gravidade Unimodular ao nível quântico? / Elias Brito Alves Junior. – – Diadema, 2022.
35 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Teoria da Relatividade) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2022.

Orientador: Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

1. Relatividade Geral. 2. Gravidade Unimodular. 3. Quantização. 4. Constante Cosmológica. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas, Campus Diadema da Universidade Federal de São Paulo, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Elias Brito Alves Junior

É possível distinguir a Relatividade Geral da Gravidade Unimodular ao nível quântico?

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de Especialista em Teoria da Relatividade, ao Programa de Pós-Graduação Lato Sensu do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

Raphael O. Garcia
Avaliador 1

Marco André Ferreira Dias
Avaliador 2

Diadema
2022

Resumo

O presente trabalho de conclusão de curso busca discutir semelhanças e diferenças entre a teoria da relatividade geral de Einstein e a chamada gravidade unimodular ao nível quântico. A principal questão a ser resolvida trata do conhecido problema da constante cosmológica, investigando sua origem e a razão pela discrepância entre valores estimados e medidos que são de 120 ordens de grandeza. Partimos de uma abordagem específica mas discutiremos resultados de outros autores para concluirmos que apenas parte do problema da constantes cosmológica está resolvido até o momento.

Palavras-chave: Relatividade Geral, Gravidade Unimodular, Quantização, Constante Cosmológica.

Sumário

1 INTRODUÇÃO 5
1.1 O problema da constante cosmológica 6

2 GRAVIDADE UNIMODULAR 8
2.1 Derivação das equações de campo 8
2.1.1 Formalismo variacional 8
2.1.2 Derivação na forma Henneaux-Teitelboim 12
2.1.3 Dinâmica Hamiltoniana 15
2.1.4 Dinâmica Hamiltoniana da forma Henneaux-Teitelboim 16
2.2 Aplicações 19

3 GRAVIDADE QUÂNTICA 22
3.1 Quantização 23
3.1.1 A integral de caminho para o formalismo de Henneaux-Teitelboim 23
3.1.2 Escolha do calibre 24
3.1.3 Derivação da ação quântica efetiva 25
3.1.4 Quantização via Ng e Dam 26

4 CONCLUSÕES 30

REFERÊNCIAS 31

1 Introdução

A teoria da relatividade geral (RG), exposta ao mundo a partir de 1915 (EINSTEIN; DAVIS, 2013), foi um marco na ciência e no entendimento de uma nova física para o que chamamos de força da gravidade e como suas implicações afetaram tanto as atividades cotidianas bem como o estudo dos astros e do Cosmos. A teoria, proposta por Einstein, foi revolucionária por diversos aspectos, partindo de uma nova interpretação sobre a relação entre massa do objetos e sua capacidade de curvar o espaço-tempo ao qual estão inseridas, bem como a curvatura do espaço-tempo ser responsável pela dinâmica das massas presente no mesmo. Isto foi entendido como um novo modo de pensar o conceito de gravidade, que antes pensada apenas como mais uma força da natureza, passou a ser entendida como resposta da curvatura do espaço-tempo às massas presentes. Nesse interím, avanços consideráveis foram obtidos em diversas áreas, principalmente na cosmologia (RYDEN, 2017), onde o entendimento de fenômenos de grande escala produziu avanços de alta relevância após o uso das equações de campo da relatividade geral para estudo da dinâmica do Cosmos. Dentre as incríveis descobertas, há de se destacar a formação de estruturas cosmológicas e astrofísicas, como estrelas, buracos negros e aglomerados de galáxias (ADAMEK et al., 2016).

As equações que governam essa dinâmica são as equações de campo de Einstein, que são expressas como

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \tag{1.1}$$

onde $G_{ab} = R_{ab} - (1/2)Rg_{ab}$ é o tensor de Einstein, R_{ab} o tensor de Ricci, R o escalar de Ricci, g_{ab} o tensor métrico, G é a constante de Newton e T_{ab} é o tensor energia momentum. Elas são responsáveis pela descrição de fenômenos na relatividade geral. Entretanto, apesar de descrever a dinâmica de corpos massivos no espaço-tempo, as equações 1.1 não delimitam nenhum equilíbrio entre forças gravitacionais, podendo levar ao colapso do Cosmos. Einstein, contrário a esta ideia, defendia um universo estático, e para isso adicionou um termo extra às equações de campo, chamada posteriormente como constante cosmológica, Λ, que corresponderia a uma pressão negativa, que se equilibra com as forças gravitacionais e mantém o universo estático. As equações modificadas se tornaram

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}. \tag{1.2}$$

Em 1929, após análise e discussões sobre resultados prévios e, posteriormente, com medidas próprias (HUBBLE, 1929), Hubble publicou um trabalho sobre o desvio para o vermelho de galáxias observadas. A consequência mais impactante foi a discussão sobre o universo estar em expansão, onde os corpos celestes estariam se afastando a uma taxa constante. Inicialmente, após a divulgação do resultado de Hubble, Einstein chegou a dizer que a constante cosmológica foi seu "maior erro"e a presença de Λ deixou de ser essencial para o estudo da dinâmica da expansão do universo. Por outro lado, em 1998, em observações de supernovas do tipo Ia, Permulter e colaboradores comprovaram que o universo se expande com uma taxa acelerada (PERLMUTTER et al., 1998) e isso motivou o retorno da constante cosmológica como grandeza responsável por esse efeito de aceleração da expansão do universo, onde vários autores atribuem como sendo a energia escura. Como consequência, um novo barulho na comunidade de físicos foi gerado e estes buscam, por meio de diferentes métodos e hipóteses, compreender o real significado da constante cosmológica.

1.1 O problema da constante cosmológica

Os estudos sobre o significado físico da constante cosmológica retornaram em 1998 no que se refere ao sentido clássico e gravitacional. Porém, uma década antes, por meio de Weinberg e outros (WEINBERG, 1989), que buscavam uma versão quântica para a RG, o termo de Λ foi de fundamental importância na descrição da densidade de energia do chamado vácuo quântico, que é a energia do vácuo, definida apenas quanticamente. Os valores obtidos teoricamente indicam o valor

$$\rho_\Lambda^{QFT} \sim 2 \times 10^{110} erg/cm^3. \tag{1.3}$$

E os valores medidos atualmente nos dá

$$\rho_\Lambda^{Obs} \sim 2 \times 10^{-10} erg/cm^3. \tag{1.4}$$

A discrepância com as medidas experimentais chegam a 120 ordens de grandeza. Daí surge o chamado **problema da constante cosmológica**, um desafio que intriga físicos de diversas áreas, desde a teoria de campos à gravitação, i.e., um problema não resolvido nem para grandes escalas, nem para a escala de Planck.

Além da diferença dos valores teóricos e medidos, há uma "coincidência"entre os valores das densidades médias para a energia escura, que se relaciona com Λ, e com a densidade média de energia da matéria observada. A isto chamam de *problema da coincidência cósmica* (STEINHARDT; WANG; ZLATEV, 1999).

O problema da constante cosmológica pode ser sumarizado em três pontos:

1. Por que Λ não é da ordem da massa de Planck - M_{Pl}^2 - devido à correções quânticas?
2. Por que após o cancelamento do termo da constante cosmológica, a maior contribuição da quebra de simetria é medida com o valor da energia escura da ordem de $10^{-120}M_{Pl}^2$?
3. Será uma coincidência que o valor encontrado atualmente seja da ordem de 3 vezes a média da densidade de energia?

Atualmente, há autores que defendem que o verdadeiro significado físico da constante cosmológica só será obtido por meio de uma teoria quântica da gravidade. Por outro lado, há autores que buscam teorias alternativas para a relatividade geral que dêem outro significado para Λ e explique alguns fenômenos que ainda não são totalmente compreendidos pela formulação padrão. Das várias teorias, podemos citar as teorias do tipo f(R) (FELICE; TSUJIKAWA, 2010), f(R,T)(HARKO et al., 2011), dentre outras. Dentro dessas alternativas, a gravidade unimodular, proposta inicialmente pelo próprio Einstein, possui um potencial muito grande para resolver o problema da constante cosmológica, tanto ao nível clássico, quanto quântico. Este trabalho busca discutir a construção dessa teoria, suas vantagens e uma abordagem quântica proposta por Smolin (SMOLIN, 2009), que resolve uma parte do problema da constante cosmológica. No capítulo 2, discutiremos aspectos da gravidade unimodular, como obter suas equações de campo e quais condições de unimodularidade são impostas para os resultados encontrados. Entretanto, para buscarmos a quantização desta proposta, iremos derivar as equações de campo na formulação de Henneaux-Teitelboim, que resolve algumas situações onde vínculos estão presentes. Além do mais, iremos encontrar as equações de campo via formulação hamiltonia para as duas condições: A gravidade unimodular e a abordagem de Henneaux-Teitelboim. No capítulo 3 daremos o processo de quantização via integral de caminho de Feynman. Os resultados de Henneaux-Teitelboim, com fixação de calibre e uma quantização da abordagem dos trabalhos de Ng e Dam são apresentados e discutidos, mostrando a compatibilidade, vantagens e desvantagens em cada ideia proposta.

2 Gravidade Unimodular

A gravidade unimodular é uma versão local com calibre fixo da relatividade geral e a principal motivação para o seu desenvolvimento é a solução do problema da constante cosmológica. Diferente da relatividade geral, onde a sua presença ocorre de forma *a posteriori* nas equações de campo, na gravidade unimodular, ela surge como uma constante de integração. Uma consequência importante disso é que ajustes podem feitos na constante para que seus valores se aproximem dos valores experimentais.

A proposta de uma gravidade unimodular, i.e., onde o determinante da métrica seja constante, tem origem com o próprio Einstein (EINSTEIN; DAVIS, 2013). Em seguida Anderson e Finkelstein (ANDERSON; FINKELSTEIN, 1971) propuseram uma alternativa ao surgimento da constante cosmológica nos seus cálculos, resultando em uma interpretação diferente do que estava sendo dada à época.

2.1 Derivação das equações de campo

As características da gravidade unimodular são que o determinante da métrica $\det(g_{ab}) = g$ é constante (alguns autores definem como $g = 1$ e outros como $g = \epsilon_0$), e as equações de campo resultante tem seus tensores sem traço. O vínculo imposto por g leva a consequências interessantes, principalmente sobre a quebra da invariância do difeomorfismo e as propostas de quantização da gravidade, pois isso leva à definição de um valor mínimo - um *quanta* - de espaço-tempo.
Partiremos de uma abordagem semelhante a utilizada por Carroll (CARROLL, 2019) e aplicando as condições de vínculo para obtenção das equações de campo.

2.1.1 Formalismo variacional

Inicialmente vamos utilizar a abordagem variacional para obtenção das equações de campo. Partindo da ação de Einstein-Hilbert e adotando c = 1,

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^n x, \tag{2.1}$$

onde temos o elemento de volume n dimensional $d^n x$, o escalar de Ricci R e g o determinante da métrica $det(g_{ab}) = g$. Pelo princípio de Hamilton, estamos interessados em

encontrar soluções estacionárias para a variação $\delta S_H = 0$. Neste caso, levaremos em conta a variação da métrica, ou, mais comumente abordado, a variação da sua inversa g^{ab}.
É importante lembrar que, escrevendo as variações em termos uma da outra,

$$\delta g_{ab} = -g_{ac} g_{bd} \delta g^{cd}, \tag{2.2}$$

pois $g^{ac} g_{cb} = \delta^a_b$ temos então, como consequência e devido à equação 2.2, que os pontos estacionários com respeito às variações em g^{ab} são equivalentes à variações com respeito à g_{ab}. Escrevendo o escalar de Ricci como $\mathrm{R} = g^{ab} R_{ab}$, a variação da ação em 2.1 nos dá

$$\delta S_H = \int d^n x \left[\sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} + \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} + g^{ab} R_{ab} \delta \sqrt{-g} \right]. \tag{2.3}$$

O segundo termo sob o sinal da integral já tem variação da métrica. O terceiro termo tem variação do determinante, o que, para a gravidade unimodular resulta numa integral de valor zero, pois $\sqrt{-g} = \epsilon_0$ e $\delta\sqrt{-g} = 0$. Além do mais, já é conhecido (D'INVERNO, 1992) o resultado

$$\delta R^d_{acb} = \nabla_c \left(\delta \Gamma^d_{ba} \right) - \nabla_b \left(\delta \Gamma^d_{ca} \right). \tag{2.4}$$

Este é um resultado importante porque nos leva a

$$\int d^n x \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} = \int d^n x \sqrt{-g} g^{ab} \left[\nabla_c \left(\delta \Gamma^d_{ba} \right) - \nabla_b \left(\delta \Gamma^d_{ca} \right) \right] \tag{2.5}$$

$$= \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_e \left[g^{ab} \left(\delta \Gamma^e_{ab} \right) - g^{ae} \left(\delta \Gamma^c_{ca} \right) \right]. \tag{2.6}$$

Como podemos escrever $\delta \Gamma^e_{ab}$ em termos de δg^{ab},

$$\delta \Gamma^e_{ab} = -\frac{1}{2} \left[g_{ca} \nabla_b \left(\delta g^{ce} \right) + g_{cb} \nabla_a \left(\delta g^{ce} \right) - g_{af} g_{bg} \nabla^e \left(\delta g^{fg} \right) \right], \tag{2.7}$$

teremos, como resultado

$$\int d^n x \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} = \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_e \left[g_{ab} \nabla^e \left(\delta g^{ab} \right) - \nabla_c \left(\delta g^{ec} \right) \right]. \tag{2.8}$$

Entretanto, observando o resultado da equação 2.8, vemos que o mesmo é uma integral com respeito ao elemento de volume da divergência covariante de um vetor. Pelo teorema de Stokes, podemos escrevê-la em termos da fronteira desse volume e, ao levá-la ao infinito, ela irá desaparecer. Isto implica que esta variação não contribui para a variação da ação de Einstein-Hilbert. Com isso, o termo que nos resta é

$$\delta S_H = \int d^n x \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab}. \tag{2.9}$$

Uma condição imposta é que a relação que a derivada funcional da ação tem que satisfazer seja do tipo

$$\delta S = \int \Sigma_i \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi^i}, \delta \Phi^i \right) d^n x, \tag{2.10}$$

onde $\{\Phi^i\}$ é um conjunto completo de campos que variam. Os pontos estacionários são aqueles onde $\frac{\delta S}{\delta \Phi^i} = 0$. Com isso, aplicando essa condição à equação 2.9, onde os campos $\{\Phi^i\}$ aqui são as métricas g^{ab}, temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{ab}} = R_{ab} = 0. \tag{2.11}$$

O resultado da equação 2.11 se aproximam das soluções para as equações de Einstein no vácuo. Entretanto, antes de impormos a outra condição unimodular, que são as equações sem traço, podemos calcular o tensor energia-momento, que surge de um termo extra na ação de Einstein-Hilbert envolvendo os campos de matéria. Para a equação estar com as dimensões corretas, escrevemos

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_M, \tag{2.12}$$

onde S_M é o termo de ação para os campos de matéria. Utilizando o mesmo procedimento para a derivada funcional de S_M, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{16\pi G} R_{ab} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} = 0. \tag{2.13}$$

A partir daqui podemos definir o tensor energia-momento como

$$T_{ab} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \tag{2.14}$$

Com isso, temos uma prévia da primeira condição para a gravidade unimodular

$$R_{ab} = 8\pi G T_{ab}. \tag{2.15}$$

Para a segunda condição partimos da definição de um tensor livre de traço,

$$\hat{X}_{ab} = X_{ab} - \frac{1}{d} X g_{ab}, \tag{2.16}$$

onde d é a dimensão do espaço-tempo, X é o traço do tensor e g_{ab} é a métrica do espaço-tempo. Assim, aplicando esta definição aos tensores de Einstein G_{ab} e o tensor energia-momento T_{ab} na equação 2.15 escrevemos

$$\hat{G}_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} \tag{2.17}$$

e

$$\hat{T}_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{4} T g_{ab}. \tag{2.18}$$

Como consequência, as equações de campo de Einstein na gravidade unimodular ficam com a forma

$$\hat{G}_{ab} = 8\pi G \hat{T}_{ab} \tag{2.19}$$

ou, mais explicitamente

$$R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} - \frac{1}{4} T g_{ab} \right). \tag{2.20}$$

Entretanto, a equação 2.20 nos dá diretamente apenas que

$$\nabla_b \hat{G}^{ab} = 0, \tag{2.21}$$

não sendo possível indicar diretamente que

$$\nabla_b \hat{T}^{ab} = 0 \Rightarrow \nabla_b T^{ab} = 0, \tag{2.22}$$

ou seja, as identidades de Bianchi não são consequências diretas (e geométricas) como na relatividade geral, mas são afirmações separadas. Diferenciando a equação 2.20 e utilizando 2.21 e 2.22, temos

$$\nabla_b \left(R^{ab} - \frac{1}{4} R g^{ab} \right) = 8\pi G \nabla_b \left(T^{ab} - \frac{1}{4} T g^{ab} \right) \tag{2.23}$$

$$\nabla_a R = -8\pi G \nabla_a T. \tag{2.24}$$

Integrando a última equação, temos que $(R + 8\pi GT))$ é uma constante:

$$R + 8\pi GT := 4\hat{\Lambda}. \tag{2.25}$$

Reescrevendo como

$$T = \frac{1}{8\pi G}\left(4\hat{\Lambda} - R\right) \tag{2.26}$$

Substituindo em 2.20 para eliminar T, temos:

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab} &= 8\pi G\left(T_{ab} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{8\pi G}\left(4\hat{\Lambda} - R\right)\right]g_{ab}\right) && (2.27)\\ &= 8\pi GT_{ab} - \frac{1}{4}\left(4\hat{\Lambda} - R\right)g_{ab} && (2.28)\\ R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab} + \hat{\Lambda} &= 8\pi GT_{ab} && (2.29)\\ R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \hat{\Lambda} &= 8\pi GT_{ab} && (2.30) \end{aligned}$$

que recupera as equações de campo de Einstein na relatividade geral. Vemos que só é possível obtermos este resultado se concluirmos que 2.22 é verdadeira, caso contrário não é possível obtermos diretamente 2.27. Temos então a consequência da constante cosmológica surgir como uma constante de integração.
Com o presente formalismo é possível apresentarmos os principais resultados da gravidade unimodular, bem como discutir algumas consequências importantes dessa abordagem, como a interpretação para o tensor energia-momentum, suas consequências para as equações de FRWL e outros. Entretanto, para quantizarmos via integral de caminho e melhor interpretarmos a questão da dinâmica, é favorável escrevermos uma abordagem hamiltoniana da gravidade unimodular. Porém, um passo intermediário é escrever a formulação via Hanneaux-Teitelboim, que nos levará a uma quantização que explicite melhor os resultados.

2.1.2 Derivação na forma Henneaux-Teitelboim

A abordagem mais utilizada para a formulação dinâmica da gravidade unimodular foi dada por Henneaux e Teitelboim (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1989), onde a ação dependerá de uma métrica completamente sem vínculos e a simetria de calibre irá incluir grupos de difeomorfismos completos na variedade. Para seguirmos com o procedimento, precisamos utilizar dois campos auxiliares. O primeiro é uma 3-forma a_{abc}, ao qual a força do campo é dada por $b_{abcd} = da_{abcd}$, que é a derivada exterior da 3-forma. O dual da força é a densidade, que é dada por

$$\tilde{b} = \frac{1}{4!}\epsilon^{abcd}b_{abcd} = \partial_a \tilde{a}^a, \tag{2.31}$$

onde $\tilde{a}^a$ é o vetor densidade do campo, definido como

$$\tilde{a}^a = \frac{1}{6}\epsilon^{abcd}a_{bcd}. \tag{2.32}$$

O segundo campo, ϕ, é um campo escalar e será utilizado como um multiplicador de Lagrange. Ambos os campos irão aparecer na ação como

$$S_{HT}(\tilde{g}_{ab}, a_{abc}, \phi, ...) = \int_M d^4x \left\{\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{8\pi G}\left(\tilde{g}^{ab}R_{ab} + \phi\right) + L^{matéria}\right) + \frac{1}{8\pi G}\phi\tilde{b}\right\} \tag{2.33}$$

A vantagem dessa abordagem é que, quando variamos ϕ, vemos a condição unimodular surgir como uma equação de movimento, pois

$$\delta S_{HT} = \int_M d^4x \left\{\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{8\pi G}\left(\delta\tilde{g}^{ab}R_{ab} + \tilde{g}^{ab}\delta R_{ab} + \delta\phi\right) + \delta L^{matéria}\right) + \frac{1}{8\pi G}\left(\delta\phi\tilde{b} + \phi\delta\tilde{b}\right)\right\} \tag{2.34}$$

$$= \int_M d^4x \left\{\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{8\pi G}\left(\delta\tilde{g}^{ab}R_{ab} + \tilde{g}^{ab}\delta R_{ab}\right) + \delta L^{matéria}\right) + \frac{1}{8\pi G}\left(\tilde{b} - \sqrt{-g}\right)\delta\phi \ + \frac{1}{8\pi G}\left(\phi\delta\tilde{b}\right)\right\}. \tag{2.35}$$

E então, tomando apenas a variação $\delta\phi$ temos

$$\frac{1}{8\pi G}\left(\tilde{b} - \sqrt{-g}\right)\delta\phi \ = 0. \tag{2.36}$$

Logo,

$$\sqrt{-g} = \tilde{b}. \tag{2.37}$$

Para a variação de $\tilde{a}^a$, temos que ver primeiro que

$$\delta\tilde{b} = \delta\partial_a\tilde{a}^a = \partial_a\delta\tilde{a}^a. \tag{2.38}$$

Então

$$\phi\delta\tilde{b} = \phi\partial_a\delta\tilde{a}^a. \tag{2.39}$$

Assim, podemos reescrever como

$$\phi\partial_a\delta\tilde{a}^a = \partial_a(\phi\delta\tilde{a}^a) - \partial_a\phi\delta\tilde{a}^a. \tag{2.40}$$

O termo $\partial_a(\phi\delta\tilde{a}^a)$ irá desaparecer na integração sobre a variedade M. Como resultado, temos

$$\partial_a\phi = 0. \tag{2.41}$$

Então, como consequência, o campo ϕ se torna uma constante no espaço-tempo nas soluções. Podemos escrever

$$\phi(x) = \Lambda. \tag{2.42}$$

Agora, variando g^{ab}, encontramos as equações de Einstein para quaisquer valores da constante Λ

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}. \tag{2.43}$$

Notemos que 2.37 implica que a derivada covariante da métrica satisfaz

$$\nabla_a\tilde{b} = \nabla_a\sqrt{-g} = 0. \tag{2.44}$$

Nesta forma apresentada, podemos ver que as equações de movimento 2.37, 2.41 e 2.43 são invariantes ao deslocamento simultâneo

$$T_{ab} \to T_{ab} + g_{ab}C, \qquad \phi \to \phi - 8\pi G C. \tag{2.45}$$

Para entendermos o que significa o campo $\tilde{a}^a$, podemos integrar 2.37 sobre uma região do espaço-tempo R, limitada por duas superfícies tipo espaço Σ_1 e Σ_2. Então

$$\int_{\Sigma_2} a - \int_{\Sigma_1} a = Vol = \int_R \sqrt{-g}. \tag{2.46}$$

Ou seja, a que é puxada de volta à superfície é uma coordenada do tempo que mede o quadri-volume para o passado da superfície. Podemos considerar que a coordenada do tempo associada à superfície Σ seja $\mathrm{T} = \int_\Sigma a$.

2.1.3 Dinâmica Hamiltoniana

Como sabemos quais grandezas estão envolvidas na dinâmica hamiltoniana, partiremos para definir como elas são escritas para a gravidade unimodular. Para uma revisão sobre o formalismo hamiltoniano da relatividade geral, é interessante a leitura do livro do Wald (WALD, 2010).
As variáveis canônicas são $\tilde{\pi}^{ij}$ e q^{ij}, onde os momentos canônicos são definidos como

$$\tilde{\pi}^{ij} = \epsilon_0 \left(K^{ij} - q^{ij} K \right), \tag{2.47}$$

onde K^{ij} é a curvatura extrínseca, K o seu traço e q^{ij} uma métrica tridimensional. A condição unimodular $\sqrt{-g} = \epsilon_0$ nos leva à função lapso

$$N = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{q}}. \tag{2.48}$$

A partir daqui podemos escrever o hamiltoniano como

$$H = \int_\Sigma \left(\epsilon_0 \left(h_0 + 8\pi G \rho \right) + N^i D_i \right), \tag{2.49}$$

onde h_0 está relacionada ao vínculo hamiltoniano tradicional,

$$h_0 = \frac{1}{\epsilon_0^2} \left[\tilde{\pi}^{jk} \tilde{\pi}_{jk} - \frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 \right] +^3 R, \tag{2.50}$$

onde ^3R é o escalar de curvatura da métrica q^{ij} e, além disso, ρ contém termos nos campos de matéria e D_i são geradores costumaz de difeomorfismos, que são vínculos de primeira classe, pois nos parênteses de Poisson, todos somem na superfície do espaço de fase. Já os vínculos de segunda classe são aqueles onde ao menos um vínculo nos parênteses de Poisson são não-nulos. Então

$$D_i = \tilde{\pi}^{jk} \mathcal{L}_i q_{jk} = 0, \tag{2.51}$$

onde $\mathcal{L}_i q_{jk}$ é a derivada de Lie correspondente. Inicialmente, não há vínculos de primeira classe no hamiltoniano. Por outro lado, como o hamiltoniano preserva D_i, novos vínculos surgem. Eles são da forma

$$S_i = \partial_i \left(h_0 + 8\pi G\rho\right) \tag{2.52}$$

Tomando a derivada covariante e vendo que

$$\nabla_{[j}S_{k]} = 0, \tag{2.53}$$

podemos afirmar que S_i é um vínculo apenas local, pois temos uma antissimetria entre os índices j e k. Isto nos dá a possibilidade de escrever o vínculo com um vetor densidade $\tilde{w}^i$, resultando em

$$S(\tilde{w}^i) = \int_\Sigma \tilde{w}^i S_i. \tag{2.54}$$

Este vetor tem uma relação de equivalência que pode ser expressa como

$$\tilde{w}^i \to \tilde{w}^{i'} = \tilde{w}^i + \partial_j \tilde{\rho}^{ij}, \tag{2.55}$$

onde $\tilde{\rho}^{ij}$ é antissimétrico, i.e., $\tilde{\rho}^{ij} = -\tilde{\rho}^{ji}$. Assim, podemos adicionar os vínculos S_i ao hamiltoniano com os multiplicadores de lagrange $\tilde{w}^i$ para encontrarmos

$$H = \int_\Sigma \left(\left(\epsilon_0 + \partial_i \tilde{w}^i\right)\left(h_0 + 8\pi G\rho\right) + N^i D_i\right). \tag{2.56}$$

Mostramos como obter a hamiltoniana com seus vínculos para a gravidade unimodular. Estes vínculos irão se manter na abordagem seguinte, adicionados de outros vínculos que surgirão para definirmos o método de quantização da GU.

2.1.4 Dinâmica Hamiltoniana da forma Henneaux-Teitelboim

Para encontrarmos a equação de evolução na forma Henneaux-Teitelboim, iremos partir da ação com os vínculos encontrados na sessão anterior, fazer uma decomposição do tipo 3+1, definir os momenta para todos os campos e veremos que na equação final, o termo de vínculo da hamiltoniana não estará presente.

Assim, a partir de agora podemos escrever a dinâmica hamiltoniana da ação na forma

$$S_{HT}(\tilde{g}_{ab}, a_{abc}, \phi, ...) = \int_M d^4x \left\{ \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{8\pi G} \left(\tilde{g}^{ab} R_{ab} + \phi \right) + L^{matéria} \right) + \frac{1}{8\pi G} \phi \tilde{b} \right\}. \tag{2.57}$$

que é a ação como função da métrica e os campos auxiliares. Para chegarmos na hamiltoniana, temos que fazer a decomposição padrão 3 + 1 e definir os momenta para todos os campos. Assim, temos

$$\tilde{\pi}^{ij} = \sqrt{q} \left(K^{ij} - q^{ij} K \right) \tag{2.58}$$

e os vínculos primários

$$P_i = P_\phi = \pi_N = \pi_{N^i} = 0 \tag{2.59}$$

e

$$\mathcal{E} = P_0 + \phi = 0. \tag{2.60}$$

Onde P_a são os momenta conjugado à $\tilde{a}^a$. Se quisermos preservar π_{N^i}, os vínculos do difeomorfismos são obtidos pelo mesmo gerador anterior, a saber

$$D_i = \tilde{\pi}^{jk} \mathcal{L}_i q_{jk} = 0. \tag{2.61}$$

Assim, o hamiltoniano, nesta fase é

$$H = \int_\Sigma \left(\tilde{\pi}^{jk} q_{jk} + P_a \dot{\tilde{a}}^a - N\sqrt{q} \left(\frac{1}{8\pi G} [R + \phi] + \rho \right) + \phi \partial_a \tilde{a}^a + \alpha \mathcal{E} + N^i D_i \right) \tag{2.62}$$

onde, para incluirmos o vínculo $\mathcal{E}$ introduzimos o multiplicador de Lagrange α. A preservação de π_N nos dá o hamiltoniano de vínculo

$$\mathcal{H} = h_0 + \phi + 8\pi G \rho = 0, \tag{2.63}$$

onde h_0 é o vínculo de peso zero, que agora expressamos como

$$h_0 = \frac{1}{q} \left[\tilde{\pi}^{jk} \tilde{\pi}_{jk} - \frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 \right] +^3 R. \tag{2.64}$$

Para encontrarmos os vínculos secundários, calculemos $\{H, P_\phi\}$ e temos como resultado

$$\mathcal{C} = N\sqrt{q} - \partial_i \tilde{a}^i. \tag{2.65}$$

O $\mathcal{C}$, junto com $\pi_N = 0$ formam os vínculos de segunda classe

$$\{\mathcal{C}, \pi_N\} = \sqrt{q}. \tag{2.66}$$

Eliminando $\mathcal{C}$ pela solução por N e substituindo em todos os lugares por

$$N = \frac{\partial_i \tilde{a}^i}{\sqrt{q}} \tag{2.67}$$

conseguimos eliminar π_N ao mesmo tempo. Podemos eliminar também o par ϕ e P_ϕ em todo lugar por $\mathcal{E}$.
Usando $\mathcal{E}$ em $\mathcal{H}$, temos um vínculo do tipo

$$\mathcal{W} = P_0 - h_0 - 8\pi G\rho = 0. \tag{2.68}$$

O resultado é uma teoria com variáveis nos pares canônicos $(q_{jk}, \tilde{\pi}^{ij})$ e $(\tilde{a}^a, P_a)$ com um hamiltoniano

$$H = \int_\Sigma \left(- \left(\partial_i \tilde{a}^i\right)(h_0 + 8\pi G\rho) + N^i D_i \right), \tag{2.69}$$

e os vínculos P_i e $\mathcal{W}$. O último vínculo é preservado pela evolução gerada por H enquanto a preservação de P_i leva a um novo conjunto de vínculos

$$S_i = \partial_i (h_0 + 8\pi G\rho) = 0. \tag{2.70}$$

Podemos verificar que, junto com D_i, S_i formam uma álgebra de primeira classe. Podemos escrever S_i com os multiplicadores de Lagrange $\tilde{w}^i$ e P_i com os multiplicadores $\tilde{u}^i$ para obtermos

$$H = \int_\Sigma \left(- \left(\partial_i \tilde{a}^i\right)(h_0 + 8\pi G\rho) + N^i D_i + \tilde{w}^i S_i + \tilde{u}^i P_i \right) \tag{2.71}$$

Por causa de $\mathcal{W}$ e S_i, a hamiltoniana de vínculo $\mathcal{H}$ foi eliminada. Isto ocorre para S_i pontualmente devido à

$$\partial_{[j} S_{k]} = 0. \tag{2.72}$$

O vínculo P_i gera

$$\delta\tilde{a}^i = \left\{\tilde{a}^i, \int_\Sigma \tilde{u}^i P_i\right\} = \tilde{u}^i \tag{2.73}$$

Isto quer dizer que $\tilde{a}^i$ são calibres. Por outro lado, $\tilde{a}^0$ define uma coordenada temporal natural. Definindo

$$P = \int_\Sigma \sqrt{q} P_0, \tag{2.74}$$

e usando $\mathcal{W}$, obteremos,

$$P = H_0 = \int_\Sigma \sqrt{q} \left(h_0 + 8\pi G\rho\right). \tag{2.75}$$

Assim, é possível ver que $\mathcal{W}$ gera mudanças em $\tilde{a}^0$ na forma

$$\delta\tilde{a}^0 = \tau\sqrt{q} \tag{2.76}$$

e são essas as grandezas correlacionadas com outras variáveis geradas pelo hamiltoniano H_0. Como o hamiltoniano de vínculos não está mais presente, a equação 2.75 pode ser vista como uma equação de evolução no tempo medidas por mudanças no quadri-volume. Após obtermos as equações de campo para a gravidade unimodular, discutiremos algumas aplicações importantes que servem de motivação para este trabalho.

2.2 Aplicações

Para destacarmos a importância e o potencial da gravidade unimodular (GU), iremos discutir algumas aplicações da teoria.

Em um trabalho de 2012 (JAIN et al., 2012), Jain e colaboradores utilizaram a GU para ajustar a teoria com os dados de supernovas do tipo Ia sem a presença da constante cosmológica, precisando adicionar um único termo "escuro"para resolver o problema da coincidência da matéria escura e da energia escura. Em 2014 Barceló (BARCELÓ; CARBALLO-RUBIO; GARAY, 2014) encontrou como solução natural para o problema de auto-acoplamento de grávitons interagentes que se propagam num espaço de Minkowski e que resultam em uma família de soluções, recaindo sobre a estrutura da gravidade unimodular.

Bonder e Corral (BONDER; CORRAL, 2018), calcularam uma dinâmica via teoria de Einstein-Cartan de forma a considerar a densidade de spin para os campos de matéria como uma fonte de torsão do espaço-tempo e como consequência obtiveram as equações de campo e leis de conservação associadas com as devidas simetrias, todas de traço nulo. Yamashita (YAMASHITA, 2021) propôs uma forma de escrever a gravidade unimodular em termos da representação das conexões, chamando-na de gravidade unimodular covariante, o que implicou numa outra forma de quantização e discutiu as diferenças entre estados quânticos da gravidade unimodular covariante, a original e a relatividade geral.
Alvarez (ALVAREZ et al., 2020) investigou uma deformação massiva livre dos fantasmas (semelhantes à gravidade massiva mimética) para a gravidade unimodular e encontrou que sua construção evita o uso de termos fantasmas (*ghost*), resultando em uma invariância de Lorentz. O mesmo Alvarez (ÁLVAREZ; HERRERO-VALEA, 2013) estudou uma invariância conforme da gravidade unimodular que sobrevive à correções quânticas.
Barvinsk em 2017 (BARVINSKY; KAMENSHCHIK, 2017) estudou via gravidade unimodular a equação de estado para o parâmetro w constante e suas implicações, mostrando que uma interpretação possível é a de que a poeira escura pode ser interpretada como matéria escura e valores diferentes de w levam ao surgimento da energia escura. Já em 2021, os mesmos autores (BARVINSKY; KOLGANOV; VIKMAN, 2021) utilizaram o que é agora chamada gravidade unimodular generalizada para estudos de teorias de auto-gravidade (*self-gravitating*). Já em (BASAK; FABRE; SHANKARANARAYANAN, 2016), Basak e colaboradores calcularam perturbações nas equações de campo da relatividade geral e da gravidade unimodular e encontraram os mesmos resultados até a segunda ordem de perturbação, tendo apenas como diferença a escolha do calibre devido ao vínculo da GU no determinante da métrica. A implicação é que ambas são indistinguíveis em dados da radiação cósmica de fundo em micro-ondas em largas escalas.
Gao e colaboradores em 2014 (GAO et al., 2014) encontraram que diferenças em flutuações adiabáticas para grandes escalas são indistinguíveis entre a RG e a GU. Já Gonzales-Martin e grupo (GONZALEZ-MARTIN; MARTIN, 2018) não encontraram diferenças significativas para o espalhamento da divergência UV entre RG e GU. Nojiri (NOJIRI; ODINTSOV; OIKONOMOU, 2016) aplicou a condição f(R) na gravidade unimodular para modificar a métrica de Friedman-Robertson-Walker e derivar as equações de movimento e discutir cenários cosmológicos que não eram obtidos via GU padrão. Como resultado obtiveram vários cenários para inflação e, em alguns casos, os resultados estiveram de acordo com dados observacionais. Já Astorga e colaboradores (ASTORGA-MORENO et al., 2019) 2019, estudam dinâmica estelar para a gravidade unimodular, partindo da consideração da não-conservação do tensor energia-momentum. Isto levou a efeitos sobre o tamanho das estrelas e implicações sobre o crescimento de estrutura estelares.
Corral e colaboradores em 2020 (CORRAL; CRUZ; GONZÁLEZ, 2020) utilizam a gravidade unimodular para, por meio das soluções das equações de campo, caracterizar termos

de difusão e associá-los à energia escura, o que contribuiu para o estudo da transição de aceleração/desaceleração da expansão do universo. Em trabalho de 2022, o grupo do Fabris (FABRIS et al., 2022), discutiu a imposição de conservação do tensor energia-momentum e como a sua não-conservação pode levar a cenários cosmológicos possíveis como a transição da fase radiativa diretamente para a acelerada, permitindo descrever a formação de estruturas.

Almeida e colaboradores (ALMEIDA et al., 2022) estudaram uma versão unimodular da teoria de Brans-Dicke e encontraram equações de campo com traço nulo, onde as soluções de vácuo reproduzem bem as soluções comuns da teoria de Brans-Dicke, mas com o surgimento natural o termo de constante cosmológica. Além disso, numa análise perturbativa, foi encontrado que configurações estáveis e instáveis são possíveis, diferente da teoria padrão, onde apenas configurações estáveis são possíveis.

Há outros trabalhos importantes sobre a gravidade unimodular, passando de mais de uma década de pesquisa e com bastante produção atual, o que mostra o real potencial da proposta.

Agora temos as motivações e o conhecimento necessário para quantizar a gravidade unimodular na forma de Hanneaux-Teitelboim.

3 Gravidade Quântica

A diferença entre a teoria da relatividade geral e a mecânica quântica é bem conhecida na literatura e amplamente discutida em livros e artigos (BOHM, 2012; LANDAU; LIFSHITZ, 2013; MESSIAH, 2014; VEN, 1992; PAULI, 2013). O debate atualmente está focado em como uma teoria pode envolver as duas anteriores, sem perder sua essência e explicar ambos os fenômenos.

Dentre as principais diferenças podemos citar as escalas envolvidas entre as teorias, onde a relatividade trabalha com escalas do tamanho do universo e a teoria quântica com a chamada escala de Planck, que envolve medidas da ordem de 1.6×10^{-35} metros. Uma implicação direta está nos questionamentos da própria teoria quântica, onde temos o problema da medição, relacionado à influência do observador nas medidas, além do seu caráter probabilístico que, somado ao princípio da incerteza de Heisenberg, retira toda a exatidão de uma medida única, coisa que não ocorre com a relatividade geral. Outra dificuldade existente reside na passagem do reino quântico para o clássico, com a perda da chamada coerência quântica, um problema em aberto e que intriga físicos de diversas áreas.

Partindo da relatividade geral, que é determinística, as incompatibilidades ocorrem por medir os efeitos gravitacionais em corpos pouco massivos e à distâncias infinitesimais, se comparadas com as escalas relevantes na teoria.

No entanto, há situações em ambas as teorias que se faz necessária a busca por uma versão quântica da gravidade. As singularidades da relatividade geral, i.e., condições extremas onde a teoria não tem respostas são a principal motivação para isso. Podemos citar o interior dos buracos negros e o próprio *Big Bang*, ao qual físicos garantem que só uma versão quântica para explicar esses fenômenos. Na teoria quântica de campos, a busca é direcionada para a partícula mediadora da força da gravidade, sendo a resposta para a última interação das quatro forças fundamentais da natureza. Assim, uma teoria quântica da gravidade visa responder questões em ambas teorias e promete ser um dos avanços mais importante da física atual.

Com este objetivo, as sessões posteriores irão, via integral de caminho, quantizar as formulações para a gravidade unimodular de modo a buscar inicialmente respostas para o problema da constante cosmológica.

3.1 Quantização

3.1.1 A integral de caminho para o formalismo de Henneaux-Teitelboim

A abordagem adotada segue por definir uma função partição (FEYNMAN; HIBBS; STYER, 2010). A proposta inicial é

$$\begin{aligned} Z = \int dq_{ij} d\tilde{\pi}^{kl} d\tilde{a}^a dP_a d\Psi dP_\Psi \delta\left(D_i\right) \delta\left(S_i\right) \delta\left(\mathcal{W}\right) \\ \times\ \delta\left(P_i\right) \delta\left(calibre\right) Det_{FP} \exp l \int dt \\ \times \int_\Sigma \left(\tilde{\pi}^{jk}\dot{q}_{jk} + P_a\dot{\tilde{a}}_a + \left(\partial_i \tilde{a}^i\right)\left(h_0 + 8\pi G\rho\right)\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde Ψ são graus de liberdade de matéria, P_Ψ são os momenta conjugados com a presença do determinante de Faddeev-Popov. Devido à escolha do calibre, temos oito graus de liberdade na invariância deste calibre ao vínculo. Na formulação de Henneaux-Teitelboim, temos desvinculados quatro difeomorfismos do espaço-tempo usual. Estes são gerados por D_i e presente em S_i. Os outros quatro são as invariâncias $\tilde{a}^a \to \tilde{a}^a + \tilde{w}^a$ geradas pelos vínculos de primeira classe P_i e $\mathcal{E}$. Inicialmente é interessante começarmos a integração sobre P_0, que usa a função delta em $\mathcal{W}$ e a integração sobre P_i. Ao mesmo tempo, podemos expressar as funções delta para os vínculos de primeira classe D_i e S_i por uma integração sobre os multiplicadores de Lagrange N^i e $\tilde{w}^i$. Como a variedade é espacialmente compacta, podemos negligenciar os termos de fronteira e encontrar

$$\begin{aligned} Z = \int dq_{ij} d\tilde{\pi}^{kl} d\tilde{a}^a dN^i d\tilde{w}^i d\Psi dP_\Psi \delta\left(calibre\right) Det_{FP} \\ \times\ \exp l \int dt \int_\Sigma \left(\tilde{\pi}^{jk}\dot{q}_{jk} + \left(\partial_a\dot{\tilde{a}}_a + \partial_i \tilde{w}^i\right)\left(h_0 + 8\pi G\rho\right) - N^i D_i\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora faremos o *shift*

$$\tilde{a}^i \to \tilde{a}^i - \tilde{w}^i \tag{3.3}$$

para que o integrando não mais dependa de $\tilde{w}^i$. A integração agora será realizada mais tranquilamente. O resultado encontrado foi

$$\begin{aligned} Z = \int dq_{ij} d\tilde{\pi}^{kl} d\tilde{a}^a dN^i d\Psi dP_\Psi \delta\left(calibre\right) Det_{FP} \\ \times\ \exp l \int dt \int_\Sigma \left(\tilde{\pi}^{jk}\dot{q}_{jk} + \left(\partial_a\dot{\tilde{a}}_a\right)\left(h_0 + 8\pi G\rho\right) - N^i D_i\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora faremos a integração sobre os momenta $\tilde{\pi}^{kl}$ e P_Ψ. Aqui, temos a razão $\tilde{b}/\sqrt{q}$ no lugar de N que, na definição de K aparece como $K_{ij} = \frac{1}{N}\left(\dot{q}_{ij} + ...\right)$. Assim

$$
\begin{aligned}
Z = &\int dq_{ij} d\tilde{a}^a dN^i d\Psi \delta\left(calibre\right) Det_{FP} \\
&\times \; \exp l \int dt \int_\Sigma \left(\tilde{b} \left(\frac{1}{8\pi G} \bar{R} + \mathcal{L}^{matéria} \right) \right),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

onde $\bar{R}$ é o escalar de Ricci calculado com a parte do vínculo onde a métrica é fixa em termos de $\tilde{b}$ como

$$
N = \frac{\tilde{b}}{\sqrt{q}}. \tag{3.6}
$$

Analisando a equação 3.5, vemos que a integral de caminho é uma função somente de nove ou dez componentes da métrica e a integral sobre a função lapso é perdida. Podemos recuperá-la introduzindo a unidade na forma

$$
1 = \int DN\delta \left(N - \frac{\tilde{b}}{\sqrt{q}} \right). \tag{3.7}
$$

3.1.2 Escolha do calibre

A escolha do calibre é quem nos fará recuperar as equações de campo para a gravidade unimodular. Uma opção possível é

$$
\tilde{f}_i = \tilde{a}_i = 0, \qquad \tilde{f}_0 = \tilde{a}_0 - t\epsilon_0 = 0 \tag{3.8}
$$

para alguma função t, que será uma coordenada temporal efetiva. O termo ϵ_0 é uma densidade fixa que é necessária para equilibrar os pesos. Então

$$
\tilde{b} = \epsilon_0. \tag{3.9}
$$

A integral de trajetória agora se torna

$$
\begin{aligned}
Z = &\int dg_{ab} d\Psi \delta \left(\sqrt{-g} - \epsilon_0 \right) \delta\left(calibre\right) Det_{FP} \sqrt{-g} \\
&\times \; \exp l \int dt \int_\Sigma \left(\epsilon_0 \left(\frac{1}{8\pi G} \bar{R} + \mathcal{L}^{matéria} \right) \right),
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

o que nos faz retornar para a ação com a forma original da gravidade unimodular S^{uni}.

3.1.3 Derivação da ação quântica efetiva

O próximo passo natural é definir uma expansão perturbativa na função partição. Para isso, a teoria pode ser reescrita como uma expansão ao redor do *background* do espaço-tempo

$$g_{ab} = g_a^{0c} X_{cb} \tag{3.11}$$

com $det(g^0) = \epsilon_0$ e o tensor métrico tendo a indicação g^0 do calbre fixado. Além disso, podemos escrever

$$\bar{X}_{ab} = [\exp(h..)]_{ab} \tag{3.12}$$

onde h_{ab} é um campo perturbativo e livre de traço, pois

$$\delta^{ab} h_{ab} = 0 \tag{3.13}$$

que é o que mantém a condição unimodular.
Em seguida devemos escrever a condição do calibre em uma forma covariante, por exemplo,

$$\mathcal{F}_b = \partial^a h_{ab}. \tag{3.14}$$

A ideia é reescrevermos a integral de caminho em termos dos campos perturbativos h_{ab}

$$Z\left[J^{ab}\right] = e^{W[J]^{ab}} = \int dh_{ab} d\Psi \delta\left(calibre\right) Det_{FP} e^{l\left(S^{uni} + \int_M h_{ab} J^{ab}\right)} \tag{3.15}$$

onde introduzimos na integral a corrente extra sem traço J^{ab}.
Precisamos construir uma ação efetiva em função dos campos $\langle h_{ab} \rangle$. Para isso, usaremos uma transformada de Legendre com a forma

$$S^{eff}\left[\langle h_{ab} \rangle\right] = W[J] - \int \langle h_{ab} \rangle J^{ab}, \tag{3.16}$$

onde

$$\langle h_{ab} \rangle = \left.\frac{\delta W}{\delta J^{ab}}\right|_{J=0} = \frac{1}{Z} \int dh_{ab} d\Psi \delta\left(calibre\right) h_{ab} Det_{FP}\; e^{l\left(S^{uni} + \int_M h_{ab} J^{ab}\right)}\Big|_{J=0} \tag{3.17}$$

Como temos a condição unimodular, um resultado imediato é que os campos do *background* são sem traço,

$$\delta^{ab} \langle h_{ab} \rangle = 0. \tag{3.18}$$

Podemos escrever $\langle \bar{g}_{ab} \rangle = \exp \langle h_{ab} \rangle$, com $det \langle \bar{g}_{ab} \rangle = -1$, que permite que escrevamos a ação efetiva em termos de um campo de *background* unimodular, $\langle \bar{g}_{ab} \rangle$. Assim, na teoria perturbativa, teremos

$$S^{eff} [\langle \bar{g}_{ab} \rangle] = S^{uni} (\langle \bar{g}_{ab} \rangle , \phi, \psi) + \hbar \Delta S (\langle \bar{g}_{ab} \rangle , \phi, \psi) . \tag{3.19}$$

Aqui temos a ação efetiva quântica que também é função da métrica unimodular.
Podemos concluir que, a quantização da gravidade unimodular pela formulação de Henneaux-Teitelboim, que retira os vínculos da hamiltoniana e mantém a condição que $\sqrt{-g} = \epsilon_0$, consegue manter a constante cosmológica no regime quântico, resolvendo o primeiro problema para Λ. Por outro lado, o problema da média da densidade de energia ter ordem próxima da densidade de energia escura não é levada em consideração aqui, e fica inicialmente sem solução. Na sessão seguinte, discutiremos brevemente outra abordagem à qual tenta solucionar este problema no nível quântico.

3.1.4 Quantização via Ng e Dam

Vimos que a gravidade unimodular pode ser quantizada preservando a condição unimodular. Isto mostra uma solução para o primeiro problema sobre a constante cosmológica. Entretanto, para os segundo e terceiro problemas ainda há questões em aberto que outras abordagens tentam solucionar.
Discutiremos a abordagem proposta por Ng e Dam (NG; DAM, 1991) com leitura própria e a leitura feita por (SMOLIN, 2009). A abordagem parte do princípio que a integral de caminho para a gravidade unimodular tem a forma

$$Z^{N_\nu D} = \int d\mu(\Lambda) Z^{GR}(\Lambda), \tag{3.20}$$

onde $Z^{GR}(\Lambda)$ é a função partição para a relatividade geral para algum valor da constante cosmológica e $d\mu(\Lambda)$ é algum fator para a medida. A partir daí eles argumentam que numa aproximação semi-clássica para a gravidade pura, no qual $S^{Einstein}(\Lambda) \approx -\Lambda Vol/4\pi G$, onde $\mathrm{Vol} = \int_M \sqrt{-g}$.
Na aproximação, o domínio é

$$Z^{N_\nu D} = \int d\mu(\Lambda) dg_{ab} e^{-t(\Lambda/4\pi G)Vol} \tag{3.21}$$

onde, segundo os autores, a aproximação de fase estacionária são dominantes para soluções do tipo $\Lambda = 0$.
Escrevendo vínculos para o espaço e o tempo, temos a proposta

$$\prod_{x^a} \delta\left(S_i\right) = \int \prod_{x^a} d\lambda(x^i, t)\delta\left(h_0 + 8\pi G\rho + \lambda\right)\delta(\partial_i \lambda), \tag{3.22}$$

onde introduzimos o campo de espaço-tempo $\lambda(x^i, t)$. Com os vínculos definidos, podemos definir a função lapso

$$\delta\left(S_i\right) = \int \prod_{x^a} d\lambda(x^i, t) dN \delta(\partial_i \lambda) e^{l \int_M N\sqrt{q}(h_0 + 8\pi G\rho + \lambda)} \tag{3.23}$$

Agora coloquemos este resultado na função partição completa para obtermos

$$\begin{aligned} Z = &\int dq_{ij} dN dN^i d\lambda d\tilde{\pi}^{kl} d\tilde{a}^a dP_a d\Psi dP_\Psi \delta(calibre) \\ &\times Det_{FP} \exp l \int_M \left(\tilde{\pi}^{jk}\dot{q}_{jk} + (\partial_a \tilde{a}^a)\left(h_0 + 4\pi G\rho\right) + N^i D_i + N\sqrt{q}\left(h_0 + 4\pi G\rho + \lambda\right)\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Lembremos que a variedade M é espacialmente compacta e que podemos ignorar termos de fronteira no tempo, podemos escrever como

$$\begin{aligned} Z = &\int dq_{ij} dN dN^i d\lambda d\tilde{\pi}^{kl} d\tilde{a}^a dP_a d\Psi dP_\Psi \delta(calibre) \\ &\times Det_{FP} \exp l \int_M \left(\tilde{\pi}^{jk}\dot{q}_{jk} + N^i D_i + (\partial_a \tilde{a}^a + N\sqrt{q})\left(h_0 + 4\pi G\rho + \lambda\right) + \tilde{a}^a \partial_a \lambda\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Agora podemos deslocar a integração sobre N por

$$N \to N' = N + \frac{\partial_a \tilde{a}^a}{\sqrt{q}}. \tag{3.26}$$

Escrevemos $\lambda(x,t) = \Lambda(t) + \delta\lambda(t,x)$, com $\int_\Sigma \sqrt{q}\delta\lambda(t,x) = 0$ e integramos sobre flutuações espaciais $\delta\lambda(t,x)$ para encontrarmos

$$\begin{aligned} Z = &\int \prod_t d\Lambda(t) \int \prod_{x^i} dq_{ij} dN dN^i d\tilde{\pi}^{kl} d\tilde{a}^a dP_a d\Psi dP_\Psi \delta(calibre) \\ &\times Det_{FP} \exp l \int_M \left(\tilde{\pi}^{jk}\dot{q}_{jk} + N^i D_i + N\sqrt{q}\left(h_0 + 4\pi G\rho + \Lambda\right) + \tilde{a}^0 \dot{\Lambda}\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

A integral sobre $\tilde{a}^0$ produz uma função delta do tipo $\delta(\dot{\Lambda})$. Assim, escrevemos de novo $\Lambda(t) = \bar{\Lambda} + \delta\Lambda(t)$, onde $\int dt \delta\Lambda(t) = 0$. A integral sobre os momenta $\tilde{\pi}^{ij}$ e dP_Ψ podem ser realizadas, produzindo

$$Z = \int d\bar{\Lambda} \int \prod_{x^a} dg_{ab} d\Psi \delta(calibre) Det_{FP} \exp l \int_M \sqrt{-g} \left(R + 2\bar{\Lambda} + \mathcal{L}^{matéria}\right). \tag{3.28}$$

que é a forma encontrada por Ng e Van Dam.
Calculemos apenas via aproximação semi-clássica

$$Z \approx \int d\Lambda \sum_{g_{ab},\Psi} \exp l \int_M \sqrt{-g} \left(-\frac{\Lambda}{4\pi G} + \left(\mathcal{L}^{matéria} - \frac{T}{2}\right)\right), \tag{3.29}$$

onde a soma é efetuada sobre os pares (g_{ab}, Ψ) que resolvem as equações de Einstein para cada valor de Λ.
Na aproximação de fase estacionária, a integração é dominada por histórias as quais

$$\frac{\Lambda}{4\pi G} \approx \frac{\int_M \sqrt{-g} \left(\mathcal{L}^{matéria} - T\right)}{Vol} = \left\langle \left(\mathcal{L}^{matéria} - \frac{T}{2}\right) \right\rangle. \tag{3.30}$$

Para fluidos perfeitos, $\mathcal{L}^{matéria} = P$ é a pressão e o valor mais provável para a constante cosmológica é

$$\frac{\Lambda}{2\pi G} \approx \frac{\int_M \sqrt{-g}\rho}{Vol}. \tag{3.31}$$

Agora podemos finalmente escrever a relação entre a constante cosmológica e a média, sobre o volume do espaço-tempo sobre a história do universo, da densidade de energia.
O cálculo formal precisa de conhecimento de teoria da medida para a cosmologia quântica, mas podemos supor que o valor da média é o mesmo do valor encontrado na expressão 3.31. Isso nos dá

$$\frac{\Lambda}{G} \approx 2\pi\rho \tag{3.32}$$

que é um valor especulativo.
O segundo problema só fica resolvido, então, por uma aproximação semi-clássica para a integral de caminho, o que vemos que não deve ser a formulação final para a quantização da gravidade unimodular.
Diferente da formulação de Henneaux-Teitelboim, a proposta de Ng e Dam objetiva ser invariante sob difeomorfismos, o que pode justificar a necessidade de uma aproximação semi-clássica, visto que a condição unimodular tende a quebrar essa invariância.
Esta formulação, junto com a anterior, se assemelham à quantização padrão da relatividade geral, onde temos que considerar os fantasmas de Faddeev-Popov (NETO, 2017) para

obtermos ações efetivas semelhantes às encontradas pela quantização da GU.

4 Conclusões

Foi mostrado que a gravidade unimodular possui as mesmas equações de campo da relatividade geral. Entretanto, a constante cosmológica surge de forma "natural"durante a obtenção dessas equações. Devido à isso, na tentativa de quantização da teoria da relatividade, é de se esperar que a quantização da gravidade unimodular seja a mais confiável, pois ela resolve parte do problema da constante cosmológica. Como pôde ser visto nas sessões anteriores, diferentes abordagens foram utilizadas com objetivo de responder outras questões acerca do problema da constante cosmológica.
Nos métodos de quantização para diferentes formulações da gravidade unimodular, foi detectado que cada abordagem resolve um quesito do problema da constante cosmológica. Na formulação de Henneaux-Teitelboim, que mantém o determinante da métrica fixo, a quantização via integral de caminho manteve a constante cosmológica na ação final e foi possível, por meio de uma expansão perturbativa, recuperarmos a ação da relatividade geral ao nível quântico.
A proposta de Ng e Dam, partindo de uma função partição mais genérica, com uma função sobre a medida de Λ, permite o cálculo da média da constante cosmológica a ser comparada com a média da desidade de energia ao que se pode atribuir à energia escura. Apesar de na prática, ainda haver algumas diferenças dos valores teóricos e medidos, ela é reduzida em 117 ordens de grandeza, o que mostra o potencial da proposta em resolver o segundo problema da constante cosmológica.
Há outras propostas de quantização da relatividade geral e da gravidade unimodular que esbarram nos mesmos conflitos. Não conseguem resolver todos aspectos do problema da constante cosmológica e ainda não conseguiram resolver o problema da coincidência cósmica. Apesar disto, várias propostas têm avançado nestes e outros aspectos a serem respondidos, onde os principais destaques são a teoria das cordas e a gravidade quântica em laços. Por fim, o trabalho buscou mostrar que é possível, com as devidas considerações, obtermos uma equivalência entre a relatividade geral e a gravidade unimodular no regime quântico e, com o surgimento de respostas acerca dos problemas da costante cosmológica e da coindiência cósmica, a gravidade unimodular se mostra uma potencial candidata a melhor teoria de gravidade a ser investigada no nível da escala de Planck.

Referências

ADAMEK, J. et al. General relativity and cosmic structure formation. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 4, p. 346–349, 2016. 5

ALMEIDA, A. M. et al. Brans–dicke unimodular gravity. *Universe*, MDPI, v. 8, n. 8, p. 429, 2022. 21

ALVAREZ, E. et al. Massive unimodular gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 37, n. 13, p. 135001, 2020. 20

ÁLVAREZ, E.; HERRERO-VALEA, M. No conformal anomaly in unimodular gravity. *Physical Review D*, APS, v. 87, n. 8, p. 084054, 2013. 20

ANDERSON, J. L.; FINKELSTEIN, D. Cosmological constant and fundamental length. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 39, n. 8, p. 901–904, 1971. 8

ASTORGA-MORENO, J. et al. Compact objects in unimodular gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2019, n. 09, p. 005, 2019. 20

BARCELÓ, C.; CARBALLO-RUBIO, R.; GARAY, L. J. Unimodular gravity and general relativity from graviton self-interactions. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 12, p. 124019, 2014. 19

BARVINSKY, A.; KAMENSHCHIK, A. Y. Darkness without dark matter and energy–generalized unimodular gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 774, p. 59–63, 2017. 20

BARVINSKY, A.; KOLGANOV, N.; VIKMAN, A. Generalized unimodular gravity as a new form of k-essence. *Physical Review D*, APS, v. 103, n. 6, p. 064035, 2021. 20

BASAK, A.; FABRE, O.; SHANKARANARAYANAN, S. Cosmological perturbations of unimodular gravity and general relativity are identical. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 48, n. 10, p. 1–30, 2016. 20

BOHM, D. *Quantum theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. 22

BONDER, Y.; CORRAL, C. Unimodular einstein-cartan gravity: Dynamics and conservation laws. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 8, p. 084001, 2018. 20

CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. 8

CORRAL, C.; CRUZ, N.; GONZÁLEZ, E. Diffusion in unimodular gravity: Analytical solutions, late-time acceleration, and cosmological constraints. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 2, p. 023508, 2020. 20

D'INVERNO, R. A. Introducing einstein's relativity. *Introducing Einstein's relativity by RA D'Inverno. New York: Oxford University Press*, 1992. 9

EINSTEIN, A.; DAVIS, F. A. *The principle of relativity*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. 5, 8

FABRIS, J. C. et al. Nonconservative unimodular gravity: a viable cosmological scenario? *The European Physical Journal C*, Springer, v. 82, n. 6, p. 1–9, 2022. 21

FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. f (r) theories. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 13, n. 1, p. 1–161, 2010. 7

FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R.; STYER, D. F. *Quantum mechanics and path integrals.* [S.l.]: Courier Corporation, 2010. 23

GAO, C. et al. Cosmological perturbations in unimodular gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 09, p. 021, 2014. 20

GONZALEZ-MARTIN, S.; MARTIN, C. P. Unimodular gravity and general relativity uv divergent contributions to the scattering of massive scalar particles. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Iop Publishing, v. 2018, n. 01, p. 028, 2018. 20

HARKO, T. et al. f (r, t) gravity. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 2, p. 024020, 2011. 7

HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. The cosmological constant and general covariance. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 222, n. 2, p. 195–199, 1989. 12

HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. 5

JAIN, P. et al. Cosmological implications of unimodular gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2012, n. 11, p. 003, 2012. 19

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum mechanics: non-relativistic theory.* [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 3. 22

MESSIAH, A. *Quantum mechanics.* [S.l.]: Courier Corporation, 2014. 22

NETO, J. B. *Teoria de Campos ea Natureza: parte quântica.* [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2017. 28

NG, Y. J.; DAM, H. V. Unimodular theory of gravity and the cosmological constant. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 32, n. 5, p. 1337–1340, 1991. 26

NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; OIKONOMOU, V. Unimodular f (r) gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP publishing, v. 2016, n. 05, p. 046, 2016. 20

PAULI, W. *Theory of relativity.* [S.l.]: Courier Corporation, 2013. 22

PERLMUTTER, S. et al. Cosmology from type ia supernovae. *arXiv preprint astro-ph/9812473*, 1998. 6

RYDEN, B. *Introduction to cosmology.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. 5

SMOLIN, L. Quantization of unimodular gravity and the cosmological constant problems. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 8, p. 084003, 2009. 7, 26

STEINHARDT, P. J.; WANG, L.; ZLATEV, I. Cosmological tracking solutions. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 12, p. 123504, 1999. 6

VEN, A. E. van de. Two-loop quantum gravity. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 378, n. 1-2, p. 309–366, 1992. 22

WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. 15

WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Reviews of modern physics*, APS, v. 61, n. 1, p. 1, 1989. 6

YAMASHITA, S. Canonical analysis of covariant unimodular gravity and an extension of the kodama state. *Physical Review D*, APS, v. 104, n. 8, p. 086029, 2021. 20