Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas
Departamento de Ciência Exatas e da Terra
Curso de Ciências – Licenciatura

THAIS OLIVEIRA DE ALMEIDA

O Equilíbrio de Nash:
Uma Perspectiva para Jogos no Ensino Médio

DIADEMA
2021

THAIS OLIVEIRA DE ALMEIDA

O Equilíbrio de Nash:
Uma Perspectiva para Jogos no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de Licenciatura em Ciências, ao Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.
Orientadora: Profa. Dra. Paola Andrea Gaviria Kassama

DIADEMA

2021

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Almeida, Thais Oliveira de
O Equilíbrio de Nash: uma perspectiva para jogos no ensino médio / Thais Oliveira de Almeida. – – Diadema, 2022.
75 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2022.

Orientadora: Paola Andrea Gaviria Kassama

1. Teoria dos Jogos. 2. Tomada de Decisões. 3. Estratégia. 4. Equilíbrio de Nash. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas, Campus Diadema da Universidade Federal de São Paulo, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

AGRADECIMENTO

Este trabalho e a minha trajetória na graduação só foram possíveis pela ajuda que eu recebi, direta ou indiretamente, dentre os que me apoiaram estão meus pais, Maria e João, minha prima Vanessa, alguns amigos próximos, em especial, Henriette, Renata e Stephanie; aos demais colegas de curso e professores que estiveram comigo ao longo de todo processo formativo; Assim como a minha orientadora, Professora Doutora Paola, que me deu todo o auxílio que precisei, sempre com muita paciência, serenidade e dedicação, sendo fundamental para que eu me mantivesse motivada e com a disciplina necessária para concluir esse trabalho.

Deixo o meu muito obrigada as Professoras Doutoras Eliane, Gleiciane, Lígia e Verilda, por terem aceitado participar da banca, e pela gentileza na forma de conduzir a defesa. Agradeço pelas contribuições para o trabalho e pelos aprendizados ao longo da graduação.

Também não posso deixar de mencionar o quão importante foi período em que estive na Extensão de Biologia, e no Programa de Iniciação à Docência (PIBID) em Ciências, coordenados pelas professoras Lígia e Marilena, respectivamente; assim como foi de extrema importância para mim o Núcleo de Apoio ao Estudante (NAE), da Universidade Federal de São Paulo, onde sua equipe e a política de permanência, me ajudaram a permanecer na universidade desde o momento em que ingressei, e que sem isso não seria possível eu cursar a graduação.

A todos o meu muito obrigado!

“Nenhuma decisão sensata pode ser tomada sem que se leve em conta o mundo não apenas como ele é, mas como ele virá a ser.”

(Isaac Asimov)

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – TCC

Anexo 6 - ATA DOS TRABALHOS DA BANCA EXAMINADORA DA MONOGRAFIA

Aos 02 dias do mês de fevereiro de 2022, às 14h, no Campus Diadema da UNIFESP, realizou-se a apresentação pública da monografia pela discente THAIS OLIVEIRA DE ALMEIDA.

Integraram a Comissão a orientadora PROFA. DRA. PAOLA ANDREA GAVIRIA KASSAMA, bem como a PROFA. DRA. ELIANE DE SOUZA CRUZ e a PROFA. DRA. GLEICIANE DA SILVA ARAGÃO.

A orientadora abriu a sessão agradecendo a participação dos membros da Comissão Examinadora. Em seguida, convidou a discente para que fizesse a exposição do trabalho intitulado: O EQUILÍBRIO DE NASH:UMA PERSPECTIVA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL II E MÉDIO.

Finalizada a apresentação, cada membro da Comissão Examinadora realizou a arguição da discente. Dando continuidade aos trabalhos, a orientadora solicitou a todos que se retirassem da sala para que a Comissão Examinadora pudesse deliberar sobre a monografia da candidata. Terminada a deliberação, a orientadora solicitou a presença de todos e leu a ata dos trabalhos, declarando a monografia da estudante APROVADA.

Paola G. Kassama

Professor (a) (Orientador do(a) discente) (UNIFESP).

PROFA. DRA. PAOLA ANDREA GAVIRIA KASSAMA

por:

Paola G. Kassama

Professor(a) (Membro da Banca Examinadora) (UNIFESP).

PROFA. DRA. ELIANE DE SOUZA CRUZ

Paola Q. Kassama por:

Professor (a) (Membro da Banca Examinadora) (UNIFESP).
PROF. DRA. GLEICIANE DA SILVA ARAGAO.

Almeida
____

(candidata)

THAIS OLIVEIRA DE ALMEIDA.

RESUMO

O trabalho tem por objetivo compreender se há aspectos além da lógica, que influenciam na tomada de decisão, para isso busca-se compreender os conceitos introdutórios da teoria dos jogos, alguns de seus métodos de resolução e sua demonstração algébrica, em especial o equilíbrio de Nash, e com isso verificar através de atividades propostas para a sala de aula, se isso ocorre. Duas atividades clássicas da teoria dos jogos, o dilema do prisioneiro e o dilema do contrato social, foram adaptadas para serem usadas com alunos do Ensino Médio, porém não foi possível devido a pandemia. Partindo dessa impossibilidade, foi buscado através de leituras, pontos que auxiliassem a responder essa questão, dois trabalhos em especial chamaram a atenção sobre a aplicação da teoria dos jogos e o equilíbrio de Nash no ensino básico, mostrando indícios que há mais fatores que devem ser levados em consideração quanto a tomada de decisão, e quais fatores podem ser esses. As atividades que foram adaptadas têm como possibilidade serem utilizadas posteriormente, em sala de aula ou em outras pesquisas.

Palavras-Chave: Teoria dos jogos. Tomada de decisões. Estratégia. Equilíbrio de Nash.

ABSTRACT

The objective of the work is to understand beyond logic, so that it is found in the determination of the games, some of the methods of the theory and its algebraic demonstration, in particular the foundation of Nash resolution, and with that to verify through the activities proposed for the classroom, if this occurs. Two classic game theory activities, the prisoner's dilemma and the social contract dilemma, were adapted for use with high school students, but this was not possible due to a pandemic. Starting from this proposal, it was sought through reading points that help to answer this question, two works in particular called attention to game theory and the strength of Nash in basic education, proposals that have more factors that must be taken into account. regarding decision making, and what those factors might be. The activities that were adapted can be used later, in the classroom or in other research.

Keywords: Game theory. Decision-making. Strategy. Nash's balance.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

i	Jogador *i*
π_i	Função de recompensa do jogador *i*
S_i	Estratégias do jogador *i*
S_{-i}	Estratégias dos outros jogadores
S_i^*	Estratégia estritamente dominante do jogador *i* em relação a S_i^{**}
S_i^{**}	Estratégia estritamente dominada do jogador *i* em relação a S_i^*
$>$	Maior
$\geq$	Maior ou igual
$<$	Menor
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
S'_i	Estratégia fracamente dominante do jogador *i* em relação a S''_i
S''_i	Estratégia fracamente dominada do jogador *i* em relação a S'_i
ε_i	Conjunto de estratégias do jogador *i*
$\mathbb{R}$	Número real
S_{1j}	Conjunto de estratégia do jogador 1
S_{2k}	Conjunto de estratégia do jogador 2

SUMÁRIO

1. Introdução

Alguns princípios matemáticos dos jogos de estratégia são utilizados na tomada de decisão, auxiliando na resolução de problemas reais, como por exemplo, no âmbito econômico: a formação de cartéis, formação de monopólios, duopólios ou oligopólios e a dinâmica da concorrência de mercado.

O matemático John Von Neumann e o economista Oskar Morgenstern, ao tentarem resolver problemas no âmbito da economia, numa tentativa de construir uma teoria racional do comportamento humano, na qual, os jogos compõem um cenário adequado para o exercício da racionalidade, deram início ao que hoje se conhece por teoria dos jogos.

A teoria dos jogos é um importante ramo de pesquisa, tanto no que diz respeito à área teórica quanto no que diz respeito à área aplicada, e uma vez que muitos dos conteúdos elementares da teoria podem ser explorados nos mais variados níveis de formação, a teoria dos jogos vem sendo vista, cada vez mais, como ferramenta estratégica de ensino, o que a faz alvo constante de investigações próprias da Educação Matemática.

A investigação da teoria dos jogos e de seu processo de ensino e aprendizagem promove um intercâmbio entre as áreas: da matemática e a das ciências, da economia, da sociologia, entre outras. Desviando do interesse exclusivamente matemático, a teoria dos jogos valoriza a compreensão da visão da matemática como uma atividade ligada aos problemas do dia-a-dia, uma vez que analisa situações que envolvem conflitos de interesses entre os jogadores (no caso, os alunos), fazendo com que, ao enfrentarem situações que envolvem problemas reais, estabeleçam estratégias para que tomem decisões racionais a fim de otimizar os benefícios, e fazendo com que reflitam sobre as próprias condutas frente à valores como o respeito mútuo, a criatividade, a curiosidade, etc.

A sala de aula pode ser usada como um lugar para refletir sobre o ambiente competitivo e colaborativo, que se vive dentro e fora do ambiente escolar, onde são reproduzidos comportamentos adquiridos em casa e no entorno do aluno.

Dayrell (1996) comenta acerca da escola como extensão das relações sociais.

> Cada escola interage diversos processos sociais: a reprodução das relações sociais, a criação e a transformação de conhecimentos, a conservação ou destruição da memória coletiva, o controle e a apropriação da instituição, a resistência e a luta contra o poder estabelecido. (SZPELETA & ROCKWELL apud DAYRELL, 1996, p.1).

Ele também convida a pensar sobre o papel da escola e sua relação na formação dos alunos enquanto indivíduos críticos, como no trecho a seguir:

> Se partíssemos da ideia de que a experiência escolar é um espaço de formação humana ampla, e não apenas transmissão de conteúdos, não teríamos de fazer da escola um lugar de reflexão (re-fletir ou seja, voltar sobre si mesmo, sobre sua própria experiência) e ampliação dos projetos dos alunos? (DAYRELL, 1996, p.10).

Lembrando-nos que para isso deve-se considerar as vivências externas que os alunos trazem, a seguir ele ressalta isso:

> Em outras palavras, os alunos já chegam à escola com um acúmulo de experiências vivenciadas em múltiplos espaços, através das quais podem elaborar uma cultura própria, uns "óculos" pelo qual veem, sentem e atribuem sentido e significado ao mundo, à realidade onde se inserem. (DAYRELL, 1996, p.6).

Deve-se ter em mente que o aluno não é uma folha em branco, e, portanto, toda essa bagagem influência na forma que ele vê o mundo e como se posiciona nele. Assim, a escola tem um papel não apenas na transmissão de conteúdo, mas na formação do indivíduo enquanto cidadão.

Esta pesquisa guiou-se pela seguinte pergunta norteadora: Quais fatores, além da lógica matemática, podem influenciar o indivíduo na tomada de decisões? Visando encontrar respostas à pergunta, pensou-se em atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, para turmas do ensino médio, em uma escola pública estadual de Diadema; porém em decorrência aos acontecimentos recentes que envolvem uma pandemia em curso e a suspensão das aulas presenciais, não foi possível levar a atividade desenvolvida para a sala de aula, então os estudos foram voltados a compreender a temática de teoria dos jogos, com os conceitos iniciais da teoria dos jogos, embasados em Fiani (2009), e usando as dissertações de Nascimento (2014) e Pereira (2014) como referência, na esperança de compreender e discutir os potenciais questionamentos que podem ser levantados pelos alunos durante a atividade, considerando que o contexto em que eles estão inseridos afeta suas decisões, levando às mais variadas e menos óbvias inquietudes dos aluno.

Partindo das ideias de Nascimento e Pereira, foram idealizadas duas atividades com potencial de aplicação em sala de aula, uma envolvendo o clássico “Dilema do Prisioneiro” e a outra envolvendo o “Contrato Social”.

Os Capítulos são da seguinte forma:

Inicialmente, no capítulo 3 será descrito sobre o desenvolvimento histórico que é trazido por Fiani (2009), trazendo alguns dos estudiosos marcantes que contribuíram para o surgimento de Teoria dos Jogos.

No capítulo 4 será descrito alguns tipos de jogos, em especial, os que serão utilizados para exemplificar as resoluções em jogos de estratégias. Para realizar as resoluções primeiro identificaremos as relações de dominância, e utilizando disso, será visto o método de resolução eliminação de estratégias estritamente dominadas, o método da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas e identificação de estratégias racionalizáveis e melhor resposta, após ver os métodos de resolução de jogos, com isso poderá ser visto se há limitações nestes métodos, e se houver, partiremos para um método mais abrangente de resolução, que é o equilíbrio de Nash.

No equilíbrio de Nash, o dilema utilizado é o da atividade 1, o dilema do prisioneiro, que consta nos apêndices A e B, como material para o professor e o aluno, respectivamente

Os métodos resolução de jogos tem as definições de Fiani (2009), porém o desenvolvimento algébrico é autoral, assim como as tabelas presentes no texto foram modificadas visualmente, deixando-as coloridas a fim de facilitar a visualização e leitura das informações para os leitores.

No capítulo 5, tem o jogo da caça ao cervo: o dilema do contrato social, aqui é descrito o problema que inspirou a criação da atividade 2, O dilema do contrato social , que consta nos apêndices C e D, como material para o professor e o aluno, respectivamente. O dilema do contrato social também é desenvolvido algebricamente nesse capítulo.

O capítulo 6 encontra-se a discussão sobre o dilema do prisioneiro, traz os resultados encontrados nas dissertações de Nascimento (2014) e Pereira (2014), tem-se também a perspectiva de outros autores sobre o que pode influenciar na tomada decisão, relacionando com os achados nas dissertações.

As propostas das atividades desenvolvidas com potencial de aplicação em sala de aula, o dilema do prisioneiro e o dilema do contrato social, se encontram no capítulo 7.

1.1. Objetivos

A partir das informações encontradas na literatura, evidenciar algum fator, alheio à lógica matemática, que influencia na tomada de decisão em geral e, em particular aos alunos do ensino médio.

1.1.1.Objetivos Específicos

Compreender e desenvolver os conceitos introdutórios da teoria dos jogos, com ênfase no equilíbrio de Nash. Desenvolver atividades centradas em jogos matemáticos com potencial de aplicação em sala de aula e que abordem a tomada de decisões pelos alunos.

2. Metodologia

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa teórico-prática, que busca responder à pergunta norteadora a partir das leituras dos trabalhos de Nascimento (2014) e Pereira (2014), entre outros autores.

Inicialmente foi realizado uma pesquisa para identificar os principais autores que tratavam do tema teoria dos jogos, nisto chegou-se ao Livro Teoria dos Jogos: Com Aplicações em Economia, Administração, de Ronaldo Fiani; que é citado em inúmeros artigos desta área de estudo, através desse livro busca-se compreender os conceitos introdutórios envolvidos na teoria dos jogos, seus dilemas clássicos e algumas formas de resolução; após isso, buscou-se por referenciais que abordam a teoria dos jogos na educação básica.

Realizou-se um levantamento bibliográfico utilizando as bases do Google Acadêmico utilizando palavras chaves como "Teoria dos Jogos" , "Ensino", "Ensino Médio" e "Educação", dos artigos encontrados foram filtrados e selecionados dois trabalhos que chamaram a atenção: Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio, dissertação de Silvio Barros Pereira e, Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio: Introdução ao equilíbrio de Nash, dissertação de Thiago Oliveira Nascimento.

As dissertações foram atrativas devido ao fato de utilizar os dilemas clássicos em uma sequência didática voltada para os alunos do ensino médio. A atividade desenvolvida em aula permitiu observar as estratégias e as respostas dadas pelos alunos frente aos dilemas. Além disso, as dissertações inspiraram a idealização de duas atividades que têm o potencial de serem postas na prática.

3. Desenvolvimento Histórico da Teoria dos Jogos

No desenvolvimento da teoria dos jogos, vários estudiosos deram suas contribuições, o primeiro que é citado por Fiani (2015) é o Matemático Antoine Augustin Cournot (1801-1877), quem elaborou elementos importantes do método que seria formalizado e aplicado na solução de um jogo não-cooperativos, isto é, "situações de interação estratégica em que não há a possibilidade de os agentes estabelecerem acordos acerca de seu comportamento durante a interação antes de ela ocorrer" (FIANI, 2015, p.34). Cournot apresentou um modelo de duopólio (que carrega o seu nome), cujo método de solução foi considerado por alguns economistas do século 20, além de, um precursor da análise de equilíbrio em jogos não-cooperativos, um método semelhante ao que seria empregado posteriormente por Nash, portanto, há algumas referências na literatura que chamam o método de resolução de equilíbrio de Cournot-Nash; porém não é unânime. É mencionado que Roger B. Myerson (apud FIANI, 2009, p.34) discorda que Cournot seja um dos fundadores da teoria dos jogos.

O matemático Ernest Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) também é citado como um dos precursores da teoria dos jogos, sua contribuição foi mostrar que o jogo de xadrez sempre tinha uma solução e que um dos jogadores sempre tinha uma estratégia vitoriosa, independente do outro; esse método de solução ficou conhecido como indução reversa.

Outro nome importante é o matemático Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956) o qual se interessava em jogos que "dependiam simultaneamente da sorte e da habilidade do jogador". Ele formulou o conceito moderno de *estratégia*, como o "método de jogo", e definiu como um "código que determina para cada circunstância possível (supostamente finitas em número) exatamente o que a pessoa deve fazer" (apud MYERSON, 1999, p.1.071 apud FIANI, 2009, p.35).

Fiani (2009) menciona que além das contribuições dos matemáticos acima, a origem da Teoria dos Jogos está diretamente ligada ao matemático John Von Neumann (1903-1957), sua primeira publicação sobre jogos é "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", mathematische Annalen 100, 295-320, no ano de 1928. Nesta publicação ele demonstra que "a solução para jogos de soma zero (jogos em que o ganho de um jogador representa necessariamente uma perda para o outro) pode ser determinada utilizando-se técnicas matemáticas". (FIANI, 2009, p. 35)

Em 1944, Neumann em parceria com o economista Oskar Morgenstern (1902-1977), escreveram o livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, no qual eles desenvolveram a análise de jogos de soma zero, também definiram a representação de jogos em forma extensiva, “ em que são identificadas as decisões de cada jogador em cada estágio do jogo, quando o jogo se desenvolve em etapas sucessivas; e discutiu cooperação e formação de coalizões entre jogadores.” (FIANI, 2009, p.36).

John F. Nash Jr. , John C. Harsanyi e Reinhard Selten, elaboraram ferramentas a partir dos anos 50 para lidar com jogos que não se restringiram a soma zero (que eram mais restritos em um grande número de interações sociais), em 1994 eles ganharam um prêmio Nobel por suas contribuições, e ajudaram a popularizar a teoria dos jogos.

Nash (1928-2015) é considerado um dos mais importantes matemáticos do século 20, e em 1951 ele definiu em um artigo “uma noção de equilíbrio para modelos de jogos que não se restringia apenas aos jogos de soma zero”. (“Non-Cooperative Games”, Annals of Mathematics 54, 286-295). Suas contribuições foram fundamentais ao desenvolvimento de teoria dos jogos, apresentando noções de equilíbrio e de que

> Cada jogador escolhe racionalmente aquela estratégica que seria a melhor resposta às estratégias dos demais, pode ocorrer que o resultado final para todos os jogadores seja insatisfatório e que, portanto, nem sempre a busca de cada indivíduo pelo melhor para si resulta no melhor para todos. (FIANI, 2009, p.36).

As análises de teorias dos jogos são utilizadas atualmente para compreender fenômenos sociais, problemas de negociação que envolvem barganha, dentre outras. Suas aplicações se estendem à economia, administração, direito, ciência política, biologia, questões de natureza militar, e no que envolve o estudo de situações de interações estratégicas, que é o reconhecimento da interdependência mútua das decisões entre os agentes envolvidos. (FIANI, 2015).

Assim o indivíduo ou grupo tem as suas decisões influenciadas pela premissa do conjunto de decisões dos demais envolvidos em uma situação de interação estratégica, onde precisa analisar quais são as consequências envolvidas e criar caminhos para atingir os objetivos desejados, desta forma, a teoria dos jogos se baseia na escolha racional que o indivíduo toma de forma consciente. Os indivíduos quando inseridos em situações de interação estratégica, precisam analisar o conjunto de possíveis escolhas de todos os participantes, criando caminhos para atingir os objetivos desejados, desta forma, a teoria dos jogos se baseia na escolha racional que os participantes tomam de forma consciente.

Segundo Pereira (2014) a “Teoria dos Jogos é uma técnica para analisar situações de conflito com a participação de dois ou mais indivíduos (ou instituições)”.

Para analisar situações de interação estratégica, pode-se recorrer a modelos, isto é, considerar de forma simplificada a representação de elementos de uma situação, visando nos dados relevantes para seu entendimento.

Fiani (2009) ressalta a complexidade que envolve a realidade e os problemas que nela se apresentam, por isso a importância e atenção na hora de selecionar os elementos que são necessários para a compreensão da situação de interação estratégica, pois dificilmente consegue-se abarcar todos os dados e detalhes, e uma seleção errada dos elementos a serem considerados comprometeria as decisões.

Em seu livro Fiani (2009) cita Karl Popper (1902-1994), filósofo que foi o primeiro a nomear a expressão "lógica situacional", a qual era utilizada como método nas ciências sociais. Para Popper o foco deveria ser em dados concretos e objetivos da situação, deixando de lado a subjetividade dos sujeitos envolvidos; para que se possa explicar as ações que são praticadas na interação.

Popper (1999) menciona nesse trecho:

> Isto nos permite compreender, então, ações em um sentido objetivo, a ponto de podermos dizer: reconhecimento, possuo diferentes alvos e sustento diferentes teorias (de, por exemplo, Carlos Magno), mas se tivesse sido colocado nesta situação (...) então eu, e presumidamente vocês também, teria agido de uma forma semelhante a dele. (KARL POPPER, Lógica das Ciências Sociais, Rio de Janeiro, Tempo Brasileiro, 1999, p. 32).

Compreende-se que Popper considera as decisões baseadas apenas em lógica, desprezando o fator psicológico; em partes há de se concordar que se tivessem em situação semelhante e com o mesmo leque de decisões, tendo que decidir baseado apenas em dados objetivos, pode-se optar pela escolha mais vantajosa, independente da época em que se tomassem a decisão; porém, sabe-se que a sociedade é complexa, e que quando toma-se uma decisão, nem sempre se é guiado pela lógica, em várias situações deve-se considerar o contexto social e cultural no qual se está inserido. (FIANI, 2009, p.31).

Segundo Fiani (2009) às interações estratégicas por ele descritas em seu livro, desconsideram aspectos do sujeito, como pensamentos e sentimentos. Outro ponto crucial, é sempre partir de um modelo, seja ele simples ou complexo, para analisar a lógica das situações. Para embasar seu pensamento, ele cita Roger B. Myerson (1991):

> A análise de qualquer jogo ou situação de conflito deve se iniciar com a especificação de um modelo que descreva o jogo. Assim, a forma ou a estrutura geral dos modelos que utilizarmos para descrever jogos deve ser cuidadosamente considerada. Uma estrutura de modelo que seja simples demais pode nos forçar a ignorar aspectos vitais dos jogos reais que desejamos estudar. Uma estrutura de modelo excessivamente complicada pode impedir nossa análise, obscurecendo as questões essenciais. (ROGER B. MYERSON, Game Theory: Analysis of Conflict, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1991, p. 37).

Dito isto, deve-se ressaltar que não há um modelo pré-definido, que serviria a todas as situações de interação estratégica e nem se pretende que a teoria dos jogos, tenha uma "receita pronta" de como se comportar em uma situação de interação estratégica na vida real.

Para McMillan, a teoria dos jogos e suas decisões estratégicas são entendidas como uma ciência e uma arte, onde além da técnica que essa ciência nos proporciona, também deve-se desenvolver a arte da estratégia através da experiência (JOHN MCMILLAN, apud FIANI, 2009).

Essa experiência que McMillan cita, dá arcabouço para distinguir o que é essencial, quando se seleciona elementos para construir um modelo que proporcione a leitura da lógica situacional; como também permite-se vislumbrar elementos específicos que fogem da teoria, e que em alguns momentos podem tomar contornos decisivos na leitura da situação de interação estratégica.

Levando em consideração o que já foi dito anteriormente relativo à teoria dos jogos, vamos atentar a duas vantagens que estudá-la proporciona.

A primeira que Fiani (2009) cita é:

"A teoria dos jogos ajuda a entender teoricamente o processo de decisão de agentes que interagem entre si, a partir da compreensão da lógica da situação em que estão envolvidos."

Quando o autor usa o termo teoricamente, ele está se referindo a estudar as abstrações que são envolvidas na tomada de decisão, ou seja, realizar as filtragens necessárias para obter os dados que são relevantes na construção de um modelo, que permite entender a lógica do processo de interação.

A segunda vantagem que ele cita é:

"A teoria dos jogos ajuda a desenvolver a capacidade de raciocinar estrategicamente, explorando as possibilidades de interação dos agentes, possibilitando estas que nem sempre correspondem à intuição."

Entende-se que nesse parágrafo o autor fala da potencialidade que a teoria dos jogos proporciona para compreender as situações, e dar ferramentas para desenvolver o raciocínio estratégico para lidar com as interações entre indivíduos ou grupos, assim como tomar decisões racionais; algo que apenas a intuição não seria capaz de proporcionar.

Um trecho em que ele deixa claro é: "amplia a percepção das possibilidades de interação estratégica entre agentes que reconhecem sua interdependência mútua e que agem racionalmente".

Nesse momento segue-se algumas definições de termos na íntegra (ou fragmentos) que Fiani (2009) utiliza em seu livro, no que ele considera como um jogo, para desemaranhar algum termo que não tenha ficado claro, e para que possa tornar mais fluido a compreensão dos assuntos abordados.

- **JOGO** - Situações que envolvem interação entre agentes racionais que se comportam estrategicamente. (NASCIMENTO, 2014).
- **UM JOGO É UM MODELO FORMAL** - Significa que a teoria dos jogos envolve técnicas de descrição e análise, ou seja, existem regras preestabelecidas para apresentar e estudar um jogo.
- **INTERAÇÕES** - São as ações exercidas pelos agentes (individualmente), que afetam ou não (depende do autor), os demais envolvidos. Fiani considera as ações que afetam.
- **AGENTES** - Também nomeado como jogador, são indivíduos ou grupos com capacidade de decisão para afetar os demais.
- **RACIONALIDADE** - É supor que os agentes utilizam os meios mais adequados para tomar decisões e atingir o que tem como objetivo. Nessa definição é excluída avaliações de natureza moral.
- **COMPORTAMENTO ESTRATÉGICO** - É quando o agente (jogador) compreende que as decisões que ele toma, podem afetar os demais em uma situação de interação, assim como as decisões do outro também o afetam. Ao ter consciência das consequências, ele pode decidir como agir, de acordo com o que ele considera que o outro irá fazer, e vice-versa.

O autor comenta que os jogos são realizados de maneira interdependente (e também mútua) em suas ações, ou seja, os jogadores consideram as decisões e reações dos demais envolvidos na interação e o que tem como objetivo, para assim realizar suas escolhas, no qual ele chama de decisão estratégica. Jogos que envolvam sorte ou habilidade (física, por exemplo) não tem decisão estratégica definida; e, portanto, não se pode considerá-lo um jogo de estratégia, que é objeto de interesse nesse trabalho (e, portanto, não será falado sobre eles).

Fiani (2009) destaca que o resultado de um jogo depende do comportamento dos jogadores frente às situações estratégicas. Então, deve-se ter clareza nos objetivos dos jogadores envolvidos, para que se possa delimitar os dados essenciais, para modelá-los e analisá-los. Também há menção sobre a racionalidade nas ações não estarem ligadas a decisões puramente egoístas, pois dependem dos objetivos dos jogadores, que podem pensar de maneira individual ou no bem estar de um grupo. Ele compreende racionalidade como “coerência entre os meios e os fins dos agentes” e:

> Racionalidade, portanto, tem a ver com os meios que os indivíduos empregam para alcançar seus fins e não com os fins em si mesmos. Isso porque a análise dos fins, ou objetivos dos jogadores, é um julgamento moral, que obviamente pressupõe um

> padrão ético. Mas a teoria dos jogos não pode oferecer nenhum padrão ético. (FIANI, 2009, p.21-22).

Encontra-se aqui um ponto do qual se pode inserir os temas contemporâneos transversais junto à teoria dos jogos, em seu uso para práticas didáticas. Onde os temas contemporâneos transversais, em especial a macroárea de cidadania e civismo ajuda a compreender as questões culturais e de valores que guiam o comportamento social e que a teoria dos jogos não abarca (pois, como o Fiani mesmo fala em seu livro, “a teoria dos jogos considera os jogadores e as interações estratégicas como sendo dados; e não possui capacidade de ser crítica com os jogadores e o jogo”), questões essas que serão faladas mais adiante.

Fiani (2009) traz a definição de Gintis (2000), nesse trecho:

> Um agente racional é aquele que:
> 1 - Aplica a lógica a premissas dadas para chegar às suas conclusões.
> 2 - Considera apenas premissas justificadas a partir de argumentos racionais.
> 3 - Usa evidências empíricas com imparcialidade ao julgar afirmações sobre fatos concretos.
> (GINTIS, 2000, p. 243. apud FIANI, 2009, p.22).

Tendo nisso o que se pode esperar de um jogador racional, que ele crie suas estratégias de forma coerente com a situação de interação estratégica, quais são suas preferências racionais, esse comportamento baseado na racionalidade dá a teoria da escolha racional, essa teoria é usada na teoria dos jogos para conseguir entender o que se pode esperar do jogadores.

As preferências dos jogadores podem ser completas se as escolhas forem factíveis e capazes de definir suas preferências em qualquer escolha possível, uma escolha estrita onde entre duas possibilidades, uma escolha é melhor que a outra, ou são indiferentes entre elas; as preferências também podem ser transitivas se houver consistência nas escolhas, e impede que um jogador fosse explorado por outro jogador. (FIANI, 2009).

4. Tipos de Jogos e Suas Resoluções

Inicialmente Nascimento (2014) ressalta a importância de se compreender o que os jogadores têm em mente em relação a suas possibilidades de decisões, assim como os seus adversários. Ou seja, ele fala que "Precisamos começar a entender como os agentes envolvidos em situações de interação estratégica analisam a situação e tomam suas decisões, para descobrirmos as melhores respostas de um jogo." (FIANI, 2009).

Então a partir do momento em que se considera que os jogadores ajam racionalmente, pode-se traçar quais serão os prováveis resultados de um jogo, portanto neste momento é realizada a análise em busca de ver qual é a estratégia em que se produz os melhores resultados, dado os objetivos dos jogadores.

Abaixo descreve-se os tipos de jogos, e será focado nos jogos simultâneos, e de informação completa, onde os jogadores conhecem quais são as recompensas dos demais jogadores.

4.1. Tipos de Jogos

Nascimento (2014) descreve alguns tipos importantes de jogos, focando nos estratégicos, dentre eles:

- **JOGOS SIMULTÂNEOS** - É o tipo de jogo, onde as decisões ou movimentos dos jogadores são tomadas ao mesmo tempo, eles tomam como base a intuição do que o outro jogador poderá escolher e com isso ele formula sua estratégia. (NASCIMENTO, 2014).
- **JOGOS DE SOMA ZERO** - Consiste em ter uma constante zero, ou seja, o ganho de um jogador representa a perda do outro jogador, e não há colaboração, por exemplo, no Xadrez.
- **JOGOS DE SOMA NÃO-ZERO -** O ganho de um jogador não é exatamente a perda do outro jogador, há uma margem para lucro e colaboração entre os jogadores , por exemplo, em cartéis. Um cartel é um grupo de empresas competidoras que fizeram uma coalizão, que é quando elas coordenam sua produção e preços, de forma a maximizar seus lucros. (FIANI, 2009).

- **JOGOS SEQUENCIAIS** - Existe uma ordenação nos movimentos, e com isso os jogadores respondem aos movimentos uns dos outros.
- **JOGOS REPETITIVOS** - São jogos que se repetem e têm os mesmos jogadores, durante a repetição os jogadores podem alterar suas estratégias, o exemplo trazido por Nascimento (2014) foi a cobrança de pênaltis.
- **JOGOS COOPERATIVOS** - É quando os jogadores podem se comunicar entre si, e podem acordar estratégias entre eles, para que todos obtenham ganhos.
- **JOGOS NÃO-COOPERATIVOS** - A maioria dos jogos são não-cooperativos, os jogadores não podem se comunicar entre si e tem como objetivo o ganho individual.
- **JOGOS DE INFORMAÇÕES COMPLETAS** - É quando o jogador sabe onde estão seus oponentes, quanto são e como estão jogando. (NASCIMENTO, 2014).
- **JOGOS DE INFORMAÇÕES INCOMPLETAS** - É quando há incerteza de onde estão os oponentes, quanto são e como estão jogando.

No que segue, será focado nos jogos simultâneos, o interesse será em determinar quais são os conjuntos de resoluções de problema de acordo com as estratégias que os jogadores poderão decidir, e quais serão seus ganhos e perdas. De forma que os jogadores possuem informações completas e são racionais, e buscam a melhor resposta. Na teoria dos jogos, os jogos simultâneos possuem relações entre as estratégias de cada jogador. Inicialmente será definido os tipos de estratégias, continuando com a explicação com o método de eliminação de estratégias estritamente dominadas, quando não for possível determinar por esse método, partiremos para o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, caso tenha limitação no método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, utilizaremos o equilíbrio de Nash.

Assim, como tem-se também o conceito de equilíbrio de Nash que é utilizado como forma de resolução, para situações como o dilema do prisioneiro; esse conceito permite identificar qual a combinação de estratégias que os jogadores optaram, mesmo quando não é possível eliminar as estratégias estritamente dominadas. (FIANI, 2009, p.81).

4.2. Tipos de Estratégias em Relação à Dominância

Fiani (2009) em seu livro, utiliza um trecho de Borel, onde é definido o conceito moderno de estratégia como sendo “um código que determina cada circunstância possível (supostamente finitas em número) exatamente o que a pessoa deve fazer" (apud MYERSON, 1999, p.1.071 apud FIANI, 2009, p.35). A seguir serão definidas as relações entre as estratégias que serão usadas nos métodos de resolução. Tais relações serão usadas nos métodos de resolução até o equilíbrio de Nash.

4.2.1. Estratégia Estritamente Dominante:

Seja ε_i={S_{i1}, S_{i2}, …S_{ik}} o conjunto de estratégias de um dado jogador *i*, S_{-i} as estratégias dos outros jogadores, e π_i a função recompensa do jogador i, que será o ganho ou perda desse jogador. O domínio da função π_i é o produto cartesiano dos conjuntos ε_i e S_{-i} , e o contradomínio da função é o conjunto dos reais.

Uma dada estratégia do jogador i, S_{ir} , com $1 \leq r \leq k$, é estritamente dominante em relação a outra estratégia S_{ij}, com $r \neq j$, deste jogador se :

$\pi_i(S_{ir}, S_{-i}) > \pi_i(S_{ij}, S_{-i})$, para todo S_{-i} [1]

"A desigualdade anterior representa o fato de que a recompensa proporcionada por S_i^* ao jogador i é estritamente superior às recompensas proporcionadas pela estratégia S_i^{**} que o jogador i pode adotar, quaisquer que sejam as estratégias adotadas pelos demais jogadores." (FIANI, 2009).

4.2.2. Estratégia Fracamente Dominante:

Seja ε_i={S_{i1}, S_{i2}, …S_{ik}} o conjunto de estratégias de um dado jogador *i*, π_i a função recompensa do jogador i, que será o ganho ou perda desse jogador, e S_{-i} as estratégias dos outros jogadores.

Uma dada estratégia do jogador i, S_{ir} , com $1 \leq r \leq k$, é fracamente dominante em relação a outra estratégia S_{ij}, com $r \neq j$, deste jogador se :

$$\pi_i(S_{ir}, S_{-i}) \geq \pi_i(S_{ij}, S_{-i}), \text{ para todo } S_{-i} ,$$

$$\pi_i(S_{ir}, S_{-i}) > \pi_i(S_{ij}, S_{-i}), \text{ para algum } S_{-i} .$$ [2]

[1] Leia-se S_i^* como S_{ir} , e S_i^{**} como S_{ij} .
[2] Leia-se S_i^* como S_{ir} , e S_i^{**} como S_{ij} .

> Essa desigualdade representa o fato de que a recompensa proporcionada por S''_i ao jogador i é maior ou igual às recompensas proporcionadas pela estratégia S'_i, quaisquer que sejam as estratégias adotadas pelo demais jogadores e, para pelo menos uma das estratégias que os demais jogadores possam adotar, a estratégia fracamente dominante S''_i produz recompensas melhores do que S'_i. (FIANI, 2009, p.84).[3]

4.3. Método de Eliminação Estratégias Estritamente Dominadas

Na teoria dos jogos, os jogos simultâneos possuem relações entre as estratégias de cada jogador. Os jogos simultâneos com estratégias estritamente dominante são mais fáceis de resolver, o jogador escolhe a estratégia que obtém o melhor ganho, ou seja, aquela que domina e elimina as outras; tem jogos que não possuem estratégias estritamente dominante, porém tem estratégias estritamente dominadas, e estas são eliminadas, fazendo com que seja encontrada a melhor resposta. E há situações nas quais as estratégias anteriores que envolvem dominância não é aplicável, neste ponto são analisadas as estratégias de um jogador em face às estratégias de outro.

Então tem-se que estratégias estritamente dominantes são aquelas estratégias que irão trazer o maior ganho para um dado jogador, independente dos outros jogadores. Quando tem uma estratégia que é superior às demais, onde obtém-se o maior lucro, tem-se uma estratégia que é estritamente dominante, e se a estratégia é superior a somente algumas, e seus ganhos são iguais às outras estratégias, ela é fracamente dominante.

A seguir será explicado, a partir de um exemplo, as estratégias estritamente dominantes.

Exemplo:

> A empresa de sabão em pó Limpo tem de decidir se lança, ou não, uma marca biodegradável para competir com o produto similar de sua concorrente, a empresa Bonito. Essa última, por sua vez, tem de decidir se aumenta, ou não, os gastos de propaganda com o seu produto. Os lucros de cada empresa são apresentados na forma estratégica da Tabela 1 a seguir, em milhões de reais. (FIANI, 2009, p.81-82).

TABELA 1 : EXEMPLO DE ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINANTES

Limpo	**Bonito**	
	Aumentar os Gastos com Publicidade	Não Aumentar os Gastos com Publicidade
Lançar o Produto Biodegradável	5, 5	7, 3
Não Lançar o Produto Biodegradável	2, 4	2, 7

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.82)

[3] Leia-se S_i'' como S_{ir} , e S_i'' .

Observando a Tabela 1, será analisado em um primeiro momento os lucros da empresa Limpo; Se a empresa lançar o seu produto biodegradável e a empresa Bonito aumentar os gastos com publicidade, o lucro da Limpo será de 5 milhões, e se a empresa lançar o seu produto biodegradável e a empresa Bonito não aumentar os gastos com publicidade, o lucro da Limpo será de 7 milhões.

Se a empresa não lançar o seu produto biodegradável e a empresa Bonito aumentar os gastos com publicidade, o lucro da Limpo será de 2 milhões, e se a empresa não lançar o seu produto biodegradável e a empresa Bonito não aumentar os gastos com publicidade, o lucro da Limpo será de 2 milhões.

Portanto, pode-se ver que a empresa Limpo obtém maiores lucros a partir do momento em que lança seu produto biodegradável, independente se a empresa concorrente Bonito gaste ou não com publicidade, portanto a empresa Limpo tem uma estratégia dominante. Em teoria dos jogos diz que a estratégia {Lançar o Produto Biodegradável} é estritamente dominante em relação à estratégia {Não Lançar o Produto Biodegradável} e desta forma, a estratégia {Não Lançar o Produto Biodegradável} é uma estratégia dominada pela estratégia {Lançar o Produto Biodegradável}. Em resumo, para ver se a empresa Limpo tem uma estratégia que é estritamente dominante com relação à outra, basta comparar se os valores das primeiras entradas da primeira linha são maiores que as primeiras entradas da segunda linha ou vice-versa.

A seguir será discutido a parte algébrica:

Jogadores:

1. Empresa Limpo;
2. Empresa Bonito.

Estes jogadores serão denotados pela variável $i = 1, 2$.

Cada jogador *i*, tem um conjunto de estratégias, que será chamado de ε_i, além disso, a variável S_{-i}, denotará as estratégias de todos os jogadores, exceto às do jogador *i*.

Para o jogador $i = 1$, o conjunto de estratégia é dado por $\varepsilon_1=\{S_{11}, S_{12}\}$, onde S_{11} é a estratégia: {Lançar o Produto Biodegradável} e S_{12} é a estratégia : {Não Lançar o Produto Biodegradável}.

Para o jogador $i = 2$, o conjunto de estratégias é dado por $\varepsilon_2 =\{S_{21}, S_{22}\}$, onde S_{21} é a estratégia : {Aumentar os Gastos com Publicidade} e S_{22} é a estratégia : {Não Aumentar os Gastos com Publicidade}.

Será também definido π_i como a função recompensa do jogador *i*, que será o ganho ou perda do jogador *i*, dependendo das estratégias que ele e os demais jogadores decidirem, assim:

$\pi_1 : \varepsilon_1 \ \text{x} \ \ \varepsilon_2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$(S_{1j}, S_{2k}) \mapsto \pi_1(S_{1j}, S_{2k})$ com 1≤ j,k ≤2.

$\pi_2 : \varepsilon_2 \ \text{x} \ \ \varepsilon_1 \rightarrow \mathbb{R}$,

$(S_{2j}, S_{1k}) \mapsto \pi_2(S_{2j}, S_{1k})$ com 1≤ j,k ≤2.

A partir da Tabela 1 obtém-se os valores da função π_1 em azul, apresentados na figura 1:

Figura 1- Recompensa do jogador 1 : empresa Limpo

$\pi_1 (S_{11} , S_{21})$ = 5	$\pi_1(S_{11} , S_{22})$ = 7
$\pi_1(S_{12} , S_{21})$ = 2	$\pi_1(S_{12} , S_{22})$ = 2

Fonte: Autora (2021)

Os ganhos do jogador Limpo são as primeiras entradas em azul da Tabela 1, enquanto os ganhos da empresa Bonito, são as segundas entradas em vermelho.
Analogamente na figura 2 estão os valores da função π_2 , obtidos da Tabela 1 (vermelho):

Figura 2 - Recompensas do jogador 2: empresa Bonito

$\pi_2 (S_{21} , S_{11})$ = 5	$\pi_2(S_{22} , S_{11})$ = 3
$\pi_2(S_{21} , S_{12})$ = 4	$\pi_2(S_{22} , S_{12})$ = 7

Fonte: Autora (2021)

Ao comparar os reais valores da função π_1 obtidos da Tabela 1 e apresentados na figura 1, nota se que a estratégia S_{11} do jogador i = 1, mostra-se mais vantajosa do que S_{12} , para este jogador, tem-se desta forma que a estratégia S_{11} é estritamente dominante em relação à estratégia S_{12}, ou seja, a estratégia: {Lançar o Produto Biodegradável} é estritamente dominante em relação à estratégia: {Não Lançar o Produto Biodegradável}.

$\pi_1(S_{11} , S_{21})$ = 5 > $\pi_1 (S_{12} , S_{21})$ = 2;

$\pi_1 (S_{11} , S_{22})$ = 7 > $\pi_1 (S_{12} , S_{22})$ = 2.

Agora, ao comparar os valores reais da função π_2 , obtidos na Tabela 1 e apresentados na figura 2, nota se que para o jogador i = 2, empresa Bonito, os lucros estão diretamente ligados ao que a empresa Limpo decidir, não há uma estratégia que seja estritamente dominante em relação a outra. Caso a empresa Limpo opte pela estratégia: {lançar o produto} obterá maior lucro em relação a estratégia: {não lançar o produto}, independente da tomada de decisão da empresa Bonito.

$\pi_2 \ (S_{21}, S_{11}) = 5 \ > \pi_2 (S_{22}, S_{11}) = 3$;

$\pi_2 (S_{21}, S_{12}) = 4 \ > \pi_2 (S_{22}, S_{12}) = 7$ (Não é uma relação uma verdadeira).

Como pode-se ver, não há uma estratégia que seja estritamente dominante em relação a outra do jogador $i = 2$.

Em resumo, para ver se a empresa Bonito tem uma estratégia que é estritamente dominante com relação à outra, basta comparar os valores da Tabela 1, focando apenas nas entradas em vermelho, a partir disso, são comparados os valores da primeira coluna com os valores da segunda coluna, que estão na mesma linha. Como visto nos cálculos algébricos, a empresa Bonito não tem estratégia estritamente dominante.

4.3.1. Estratégias Fracamente Dominantes

As estratégias estritamente dominantes foram exemplificadas anteriormente, através de um problema enunciado na página 25. Os valores desse problema foram alterados para exibir um exemplo de estratégias fracamente dominantes, conforme a Tabela 2 a seguir:

TABELA 2 : EXEMPLO DE ESTRATÉGIAS FRACAMENTE DOMINANTES

Limpo	Bonito	
	Aumentar os Gastos com Publicidade	Não Aumentar os Gastos com Publicidade
Lançar o Produto Biodegradável	2, 5	7, 3
Não Lançar o Produto Biodegradável	2, 4	2, 7

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.83)

A partir da Tabela 2 obtém-se os valores da função π_1 em azul :

Figura 3 - Recompensas do jogador 1: empresa Limpo

$\pi_1 (S_{11}, S_{21}) = 2$	$\pi_1(S_{11}, S_{22}) = 7$
$\pi_1(S_{12}, S_{21}) = 2$	$\pi_1(S_{12}, S_{22}) = 2$

Fonte: Autora (2021)

A seguir será discutido a parte algébrica:

Jogadores:

1. Empresa Limpo;

2. Empresa Bonito.

Estes jogadores serão denotados pela variável i = 1, 2.

Cada jogador i, tem um conjunto de estratégias, que será chamado de ε_i, além disso, a variável S_{-i}, denotará as estratégias de todos os jogadores, exceto às do jogador i.

Para o jogador i = 1, o conjunto de estratégia é dado por ε_1={S_{11}, S_{12}}, onde S_{11} é a estratégia: {Lançar o Produto Biodegradável} e S_{12} é a estratégia : {Não Lançar o Produto Biodegradável}.

Para o jogador i = 2, o conjunto de estratégias é dado por ε_2 ={S_{21}, S_{22}}, onde S_{21} é a estratégia : {Aumentar os Gastos com Publicidade} e S_{22} é a estratégia : {Não Aumentar os Gastos com Publicidade}.

Tem-se:

$\pi_1 (S_{11}, S_{21}) = 2 \geq \pi_1(S_{12}, S_{21}) = 2$;

$\pi_1(S_{11}, S_{22}) = 7 \geq \pi_1(S_{12}, S_{22}) = 2$.

Fiani (2009) exemplifica como busca-se uma solução de jogo em uma situação de interação estratégica. Esse método consiste em eliminar as estratégias estritamente dominadas, nela tem-se uma opção de estratégia que é superior às demais, ou seja, obtém-se um melhor resultado em comparação às outras, independente da escolha dos outros jogadores, sabendo que o jogador é racional, ele optará por essa estratégia , para isso ele irá eliminando as estratégias menos interessantes.

4.4. Método da eliminação Iterativa de estratégias estritamente dominadas

Eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas segundo Fiani (2009) é " um dos métodos mais simples para se determinar o resultado de um jogo simultâneo". O objetivo será buscar estratégias que são estritamente dominadas.

Em seu livro Teoria dos Jogos, Fiani (2009) traz uma situação para ilustrar o uso do método de eliminação iterativa estritamente dominadas:

> Duas empresas, a Carro Novo e a Novo Auto, competem no mercado automobilístico. A empresa Carro Novo já tem seu modelo de utilitário, que é um sucesso, enquanto a Novo Auto ainda não oferece nenhum modelo de utilitário. (FIANI, 2009, p.84).

As estratégias disponíveis para a empresa Novo Auto são: importar o utilitário de sua matriz estrangeira; produzir o utilitário nacionalmente; ou não competir nesse segmento de utilitários. As estratégias disponíveis para a empresa Carro Novo são: lançar uma nova versão de seu modelo de utilitário; manter o preço de seu modelo de utilitário; ou diminuir o preço de seu modelo de utilitário.

Ambas as empresas tomarão suas decisões anuais simultaneamente, sem que conheçam a decisão de seu adversário. Na Tabela 3 são apresentadas as projeções estimadas dos lucros de ambas as empresas (em milhões), com base nos conhecimentos anteriores de situações estratégicas semelhantes no mercado e de embates anteriores entre si.

TABELA 3 : EXEMPLO DE ELIMINAÇÃO ITERATIVA DE ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS

Novo Auto	Carro Novo		
	Lançar Nova Versão	Manter Preço	Reduzir Preço
Lançar Modelo Próprio	1, 4	4, 1	1, 3
Importar da Matriz	2, 2	2, 1	2, 3
Não Competir com a Carro Novo	1, 1	0, 6	1, 0

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.85)

Ao olhar a Tabela 3, observa-se que Carro Novo não tem uma estratégia estritamente dominante, pois se a empresa optar pela estratégia:{Lançar Nova Versão}, será sua melhor opção se a empresa Novo Auto adotar como estratégia:{Lançar Modelo Próprio}, porque isso fará com que seu lucro seja de 4 milhões; a melhor estratégia: {Reduz Preço}, será a sua melhor opção se a empresa Novo Auto adotar como estratégia: {Importar da Matriz}, porque isso fará com que seu lucro seja de 3 milhões; e a melhor estratégia: {Manter Preço}, será a sua melhor opção se a empresa Novo Auto adotar como estratégia: {Não Competir com Carro Novo}, porque isso fará com que seu lucro seja de 6 milhões.

Note que na empresa Novo Auto a estratégia {Importar da Matriz} é estritamente dominante em relação à estratégia {Não Competir com Carro Novo}, enquanto a estratégia: {Lançar Modelo Próprio} é fracamente dominante em relação à estratégia:{Não Competir com Carro Novo}, de qualquer maneira a estratégia : {Não competir com Carro Novo} é a pior estratégia de Novo Auto.

Seguem os cálculos algébricos que corroboram o dito anteriormente, em relação às estratégias da empresa Novo Auto:

Sendo S_{11} a estratégia: {Lançar Modelo Próprio}, S_{12} a estratégia: {Importar da Matriz} e S_{13} a estratégia: {Não Competir com a Carro Novo}.

A estratégia {Importar da Matriz} é estritamente dominante em relação à estratégia {Não Competir com Carro Novo}

Têm-se os seguintes valores para o Novo Auto:

Figura 4 - Recompensas do jogador 1: empresa Novo auto

$\pi_1 (S_{11}, S_{21}) = 1$	$\pi_1(S_{11}, S_{22}) = 4$	$\pi_1(S_{11}, S_{23}) = 1$
$\pi_1(S_{12}, S_{21}) = 2$	$\pi_1(S_{12}, S_{22}) = 2$	$\pi_1(S_{12}, S_{23}) = 2$
$\pi_1(S_{13}, S_{21}) = 1$	$\pi_1(S_{13}, S_{22}) = 0$	$\pi_1(S_{13}, S_{23}) = 1$

Fonte: Autora (2021)

Comparando a estratégia S_{11} em relação à estratégia S_{12} :

$\pi_1 (S_{11}, S_{21}) = 1 > \pi_1(S_{12}, S_{21}) = 2$ (não é uma relação verdadeira);

$\pi_1(S_{11}, S_{22}) = 4 > \pi_1(S_{12}, S_{22}) = 2$;

$\pi_1(S_{11}, S_{23}) = 1 > \pi_1(S_{12}, S_{23}) = 2$ (não é uma relação verdadeira).

Comparando a estratégia S_{12} em relação à estratégia S_{13} :

$\pi_1(S_{12}, S_{21}) = 2 > \pi_1(S_{13}, S_{21}) = 1$;

$\pi_1(S_{12}, S_{22}) = 2 > \pi_1(S_{13}, S_{22}) = 0$;

$\pi_1(S_{12}, S_{23}) = 2 > \pi_1(S_{13}, S_{23}) = 1$.

Comparando a estratégia S_{11} em relação à estratégia S_{13} :

$\pi_1 (S_{11}, S_{21}) = 1 \geq \pi_1(S_{13}, S_{21}) = 1$;

$\pi_1(S_{11}, S_{22}) = 4 > \pi_1(S_{13}, S_{22}) = 0$;

$\pi_1(S_{11}, S_{23}) = 1 \geq \pi_1(S_{13}, S_{23}) = 1$.

Portanto, as estratégias S_{11} : {Lançar Modelo Próprio} e S_{12} :{Importar da Matriz}, são estritamente dominantes em relação a S_{13}:{Não Competir com Carro Novo}, logo, a estratégia : { Não Competir com Carro Novo } é a pior estratégia e deve ser retirada, conforme a Tabela 4:

TABELA 4 : EXEMPLO DE ELIMINAÇÃO ITERATIVA DE ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS (1ª RODADA)

Novo Auto	Carro Novo		
	Lançar Nova Versão	Manter Preço	Reduzir Preço
Lançar Modelo Próprio	1, 4	4, 1	1, 3
Importar da Matriz	2, 2	2, 1	2, 3
~~Não Competir com a Carro Novo~~	~~1, 1~~	~~0, 6~~	~~1, 0~~

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.87)

Analisando a Tabela 4, observa-se que não há uma estratégia dominante para a empresa Nova Auto, enquanto{Importar da Matriz} é a melhor estratégia, caso a empresa Carro Novo decida {Lançar a Nova Versão} ou {Reduzir Preço}, a estratégia {Importar da Matriz}, não é a melhor estratégia da empresa Novo Auto, caso a empresa Carro Novo decida {Manter o Preço}.

Após a primeira eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, na qual foi retirado a estratégia: {Não Competir com a Carro Novo}, nota-se que a empresa Novo Auto, não tem relações de dominância, enquanto a empresa Carro Novo passou a ter a estratégia: {Manter Preço} como estritamente dominada pelas estratégias: {Lançar Nova Versão} e {Reduzir Preço}, sendo a candidata para retirar da Tabela 4.

Conforme a eliminação das estratégias estritamente dominadas, as estratégias que ficaram e não eram estritamente dominadas originalmente, podem passar a ser estratégias estritamente dominadas em relação à outra estratégia. (FIANI, 2009).

A seguir serão feitas as análises algébricas das estratégias estritamente dominante da empresa Carro Novo:

Sendo S_{21} a estratégia: {Lançar Nova Versão}, S_{22} a estratégia: {Manter Preço} e S_{23} a estratégia: {Reduzir Preço}.

Figura 5 – Recompensas do jogador 2 : empresa Carro Novo

$\pi_2(S_{21}, S_{11}) = 4$	$\pi_2(S_{22}, S_{11}) = 1$	$\pi_2(S_{23}, S_{11}) = 3$
$\pi_2(S_{21}, S_{12}) = 2$	$\pi_2(S_{22}, S_{12}) = 1$	$\pi_2(S_{23}, S_{12}) = 3$

Fonte: Autora (2021)

Comparando a estratégia S_{21} em relação à estratégia S_{22} :

$\pi_2(S_{21}, S_{11}) = 4 > \pi_2(S_{22}, S_{11}) = 1$;

$\pi_2(S_{21}, S_{12}) = 2 > \pi_2(S_{22}, S_{12}) = 1$.

Comparando a estratégia S_{23} em relação à estratégia S_{22} :

$\pi_2 (S_{23}, S_{11}) = 3 > \pi_2 (S_{22}, S_{11}) = 1$;

$\pi_2 (S_{23}, S_{12}) = 3 > \pi_2(S_{22}, S_{12}) = 1$.

Comparando a estratégia S_{21} em relação à estratégia S_{23} :

$\pi_2 (S_{21}, S_{11}) = 4 > \pi_2 (S_{23}, S_{11}) = 3$;

$\pi_2 (S_{21}, S_{12}) = 2 > \pi_2 (S_{23}, S_{12}) = 3$ (Não é uma relação verdadeira).

Acima pode-se ver que a estratégia S_{22} é estritamente dominada pela estratégia S_{21} e pela estratégia S_{23}, portanto, a estratégia S_{22}, que é a estratégia: {Manter Preço} é uma estratégia estritamente dominada em relação às demais estratégias, desta maneira será eliminada, cortando a coluna referente a essa estratégia, conforme a Tabela 5:

TABELA 5 : EXEMPLO DE ESTRATÉGIAS RESTANTES APÓS DUAS RODADAS DE ELIMINAÇÃO ITERATIVA DE ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS

Novo Auto	Carro Novo		
	Lançar Nova Versão	~~Manter Preço~~	Reduzir Preço
Lançar Modelo Próprio	1, 4	~~4, 1~~	1, 3
Importar da Matriz	2, 2	~~2, 1~~	2, 3

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.87)

Olhando a Carro Novo verifica-se que após a segunda eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, eliminando a estratégia: {Manter Preço}, não há mais nenhuma estratégia que possa ser eliminada.

Note que as estratégias da empresa Carro Novo da Tabela 5 não têm relação de dominância, pois a estratégia:{Lançar Nova Versão}, será sua melhor opção se a empresa Novo Auto adotar como estratégia:{Lançar Modelo Próprio}, pois isso fará com que seu lucro seja de 4 milhões. Enquanto a estratégia: {Reduz Preço}, será a melhor opção se a empresa Novo Auto adotar como estratégia: {Importar da Matriz}, pois isso fará com que seu lucro seja de 3 milhões.

Por outro lado, para a empresa Novo Auto a estratégia: {Importar da Matriz} é estritamente dominante em relação a estratégia:{Lançar Modelo Próprio}.

A seguir os cálculos algébricos:

Após duas rodadas de eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas, será visto as estratégias do Carro Novo algebricamente:

Figura 6 - Recompensas do jogador 2: empresa Carro Novo

$\pi_2\,(S_{21}\,,S_{11}\,) = 4$	$\pi_2\,(S_{23}\,,S_{11}\,) = 3$
$\pi_2(S_{21}\,,S_{12}\,) = 2$	$\pi_2(S_{23}\,,S_{12}\,) = 3$

Fonte: Autora (2021)

Sendo S_{21} a estratégia: {Lançar Nova Versão} e S_{23} a estratégia: {Reduzir Preço}, iremos compará-las:

$\pi_2\,(S_{21}\,,S_{11}\,) = 4 > \pi_2\,(S_{23}\,,S_{11}\,) = 3$;

$\pi_2(S_{21}\,,S_{12}\,) = 2 > \pi_2\,(S_{23}\,,S_{12}\,) = 3$ (Não é uma relação verdadeira).

Desta forma, pode-se ver, algebricamente que não há uma relação de dominância entre as estratégias do Carro Novo, dessa forma não poderá eliminar nenhuma estratégia.

A seguir a análise algébrica das estratégias do Novo Auto:

Figura 7 - Recompensas do jogador 1: empresa Novo Auto

$\pi_1\,(S_{11}\,,S_{21}\,) = 1$	$\pi_1(S_{11}\,,S_{23}\,) = 1$
$\pi_1(S_{12}\,,S_{21}\,) = 2$	$\pi_1(S_{12}\,,S_{23}\,) = 2$

Fonte: Própria (2021)

Sendo S_{11} a estratégia: {Lançar Modelo Próprio} e S_{12} a estratégia: {Importar da Matriz}, iremos comparar a estratégia S_{12} e a estratégia S_{11} :

$\pi_1(S_{12}\,,S_{21}\,) = 2 > \pi_1\,(S_{11}\,,S_{21}\,) = 1$;

$\pi_1(S_{12}\,,S_{23}\,) = 2 > \pi_1(S_{11}\,,S_{23}\,) = 1$.

A estratégia : {Importar da Matriz} é uma estratégia estritamente dominante da estratégia: {Lançar Modelo Próprio}. Dado que a estratégia: {Lançar Modelo Próprio} é a Estratégia Estritamente Dominada em relação a outra estratégia; portanto, será retirado a segunda linha que é referente a estratégia: {Lançar Modelo Próprio}, obtendo a Tabela 6 abaixo:

TABELA 6 : EXEMPLO DE ELIMINAÇÃO ITERATIVA DE ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS (3ª RODADA)

Novo Auto	Carro Novo	
	Lançar Nova Versão	Reduzir Preço
Importar da Matriz	2, 2	2, 3

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.87)

Ao olhar as estratégias do Novo Auto, observa-se que não há uma estratégia que seja estritamente dominante e nem estritamente dominada, dessa forma, será visto as estratégias do Carro Novo.

Sendo S_{21} a estratégia: {Lançar Nova Versão} e S_{23} a estratégia: {Reduzir Preço}

Tem-se que:

$\pi_2\,(S_{23}\,,S_{12}\,) = 3 > \pi_2\,(S_{21}\,,S_{12}\,) = 2.$

Dessa maneira pode-se ver que a estratégia: {Lançar Nova Versão} é estritamente dominada em relação a estratégia: {Reduzir Preço} do Carro Novo, e com isso, será eliminada.

O final do jogo entre o Novo Auto e o Carro Novo é dado pela combinação de estratégias {Importar da Matriz, Reduzir Preço}. Esse resultado constitui um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes. (FIANI, 2009, p. 88).

4.5. Estratégias Racionalizáveis e Melhor Resposta

Acima foi visto o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominantes, método esse que compara as estratégias entre si, de um mesmo jogador, eliminando as estratégias estritamente dominadas até que reste apenas um par de estratégias; este par de estratégias apresentam equilíbrio em estratégias estritamente dominantes. Um jogo que é possível de ser solucionado pelo método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominantes é dito que é solucionável por dominância, e suas estratégias resultantes do método são chamadas de racionalizáveis.

Fiani (2009) também aponta que se deve levar em consideração que os jogadores são racionais e tem ciência que seus adversários também são, e o oposto também ocorre, isso é tido como a hipótese de conhecimento comum da racionalidade.

A hipótese de conhecimento comum da racionalidade parte que em um jogo simultâneo, supondo que têm-se dois jogadores, jogador *i* e jogador *j*, e que ambos são racionais e isso é de conhecimento comum, se nesse jogo alguma estratégia S_i^{**} do jogador *i* sempre produz um resultado pior para o jogador i de que todas as outras estratégias, independente da tomada de decisão do jogador j, não há nada que justifique o jogador i escolha a estratégia S_i^{**}. (FIANI, 2009).

Será usada a Tabela 3 do exemplo anterior modificada para observar o que Fiani (2009) descreve acima.

Outro exemplo:

TABELA 7 : EXEMPLO DE ELIMINAÇÃO ITERATIVA DE ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS

Novo Auto	Carro Novo		
	Lançar Nova Versão	Manter Preço	Reduzir Preço
Lançar Modelo Próprio	1, 4	4, 1	2, 3
Importar da Matriz	2, 2	2, 1	1, 3
Não Competir com a Carro Novo	0, 1	0, 6	0, 0

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.89)

Ao olhar a empresa Novo Auto, pode-se ver que não há um motivo racional que justifique escolher a estratégia: {Não Competir com a Carro Novo}, tendo em vista que ele é racional e compreende que independente do que a empresa Carro Novo optar em fazer, essa estratégia é a que produz o pior resultado para si, olhando as combinações de estratégias.

A formalização matemática do conceito de melhor resposta em teoria dos jogos, pode ser dado da seguinte maneira por Fiani (2015):

"Dada uma estratégia S_i^* de um jogador i é considerada a melhor resposta desse jogador i a uma dada estratégia S_{-i} dos demais jogadores se:

$$\pi_i(S_i^*, S_{-i}) \geq \pi_i(S'_i, S_{-i}) \text{ para algum } S_{-i} \text{ e todo } S'_i \neq S_i^* .$$

Tendo que a função π_i representa a recompensa do jogador i. Pode-se dizer que dada a estratégia S_i^* de um jogador i é a melhor resposta deste jogador i a uma dada estratégia S_{-i} dos demais jogadores, isso também indica que os demais jogadores optarem pela combinação de estratégias S_{-i}, a estratégia S_i^* é a que o jogador i obtém a melhor recompensa se comparadas a qualquer outra estratégia S'_i .

Tem-se uma estratégia que pode não ser a melhor resposta para uma estratégia específica que os outros jogadores optem, pode ocorrer que uma outra estratégia nunca seja a melhor resposta para um dado jogador, independente das estratégias dos outros jogadores escolhem. Isso ocorre quando:

$$\pi_i(S_i^{**}, S_{-i}) < \pi_i(S_i^*, S_{-i}) \text{ para algum } S_i^* \neq S_i^{**} \text{ e todo.}$$

S_i^{**} não é a melhor resposta para o jogador i, sendo que possui outra estratégia que obtém uma maior recompensa.

Também consegue-se intuir que uma estratégia estritamente dominada de um jogador, não é a sua melhor opção, pois não é a que obtém a maior recompensa.

4.6. A Limitação do Método de Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas

Uma das principais limitações do método de eliminação de estratégias estritamente dominadas é que nem todos os jogadores possuem estratégias estritamente dominadas. Um exemplo disso, pode ser visto quando se é modificado os dados da Tabela 5, conforme a Tabela 8:

TABELA 8 : EXEMPLO DE LIMITAÇÃO DO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO ITERATIVA DE ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS

Novo Auto	Carro Novo		
	Lançar Nova Versão	Manter Preço	Reduzir Preço
Lançar Modelo Próprio	2, 1	1, 0	0, -1
Importar da Matriz	1, 0	2, 1	-1, 2

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.91)

Ao olhar a empresa Novo Auto (linha com números em azul), pode ser visto que se comparar as suas estratégias, não tem uma relação de dominância, pois seus ganhos estão relacionados ao que a empresa Carro Novo optar, e o inverso também ocorre, com a empresa Carro Novo (colunas com números em vermelho), pode-se observar em suas estratégias que não há uma relação de dominância, seus ganhos também estão ligados ao que o carro novo decidir.

Em ambos os casos, o lucro das duas empresas está ligado ao que sua competidora escolher, e nenhuma de suas estratégias se mostra mais vantajosa que as demais.

4.7. Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash é um método mais abrangente para análise de conflitos, que serve quando há estratégias estritamente dominadas, como quando não há (FIANI, 2009). Em um conjunto de estratégias (uma para cada jogador), tem que a motivação do jogador para mudar a estratégia que irá tomar no jogo, depende do outro jogador, e se o outro também irá mudar (PEREIRA, 2014).

Fiani (2009) também define o equilíbrio de Nash como sendo "todas as estratégias adotadas por todos os jogadores sejam as melhores respostas às estratégias dos demais"; e em termos matemáticos é que se tenha uma estratégia S_i^* que é a estratégia que obtém o melhor resultado para o jogador i,

$$\pi_i(S_i^*, S_{-i}^*) > \pi_i(S_i, S_{-i}^*) \text{ para todo } S_i \text{ e todo } i.$$

π_i segue sendo a representação da função de recompensa do jogador i, S_i é uma dada estratégia do jogador i, S_{-i} é uma estratégia dos demais jogadores que não são o jogador i, e o sinal asterisco significa que a estratégia faz parte de um equilíbrio de Nash (FIANI, 2009).

Para um melhor entendimento do equilíbrio de Nash, segue um exemplo, e no apêndice B, página 67, consta a folha de atividade 1 destinada aos alunos, contendo este Dilema. No apêndice A, página 61 até a página 66, encontra-se o material destinado ao professor.

Dois criminosos praticam um crime juntos. São presos e interrogados separadamente. A polícia não tem provas contra eles e a única forma de condená-los é um delatar o outro. Cada prisioneiro tem uma escolha: calar ou acusar o companheiro. Se os dois ficarem quietos, ambos serão liberados. A polícia, querendo uma solução rápida para o caso, oferece alguns incentivos: o prisioneiro que denunciar o outro ganha a liberdade e ainda por cima leva uma recompensa em dinheiro. O outro pegará 5 anos de prisão. Qual a escolha lógica?

A Tabela 9 ilustra a situação :

TABELA 9 : EQUILÍBRIO DE NASH

		JOGADOR B	
		CONFESSA	NÃO CONFESSA
JOGADOR A	CONFESSA	-5, - 5	0 + Recompensa, -5
	NÃO CONFESSA	- 5, 0 + Recompensa,	0, 0

Fonte: Autora (2021)

Na Tabela 9 pode ser visto as consequências de acordo com cada decisão racional que pode ser tomada por cada jogador; pensando no Jogador A (as consequências são análogas no Jogador B), se ele confessar e o Jogador B também confessar, ambos ficaram presos por 5 anos cada; se o Jogador A confessar e o Jogador B não, o Jogador A ficará livre e ganhará uma recompensa, enquanto o Jogador B ficará preso por 5 anos; se o Jogador A não confessar e o Jogador B confessar, o Jogador A será preso por 5 anos e o Jogador B ficará livre e ganhará uma recompensa; e se o Jogador A não confessar e nem o Jogador B, ambos saíram livres, mas ninguém ganha a recompensa. Pensando que o Jogador A não tem contato com o Jogador B, e não que conseguiram combinar suas escolhas, o Jogador A terá que tomar sua decisão pensando nas possíveis escolhas do Jogador B, e supondo que o Jogador A seja racional, ele buscará a melhor decisão para si; que é escolher delatar, pois além de sair livre, ele ganhará uma recompensa.

Algebricamente tem-se:

Jogadores:

1. Jogador A;
2. Jogador B.

Estes jogadores serão denotados pela variável $i = 1, 2$.

Cada jogador i, para $i = 1$ ou $i = 2$, tem um conjunto de estratégias, que será chamado de ε_i, além disso, a variável S_{-i} , denota as estratégias de todos os jogadores, exceto às do jogador i. Como nos outros casos a função π_i denota a função de recompensa do jogador i.

Para o jogador i = 1, o conjunto de estratégia é dado por ε_1 ={S_{11} , S_{12} }, onde S_{11} é a estratégia: {Confessar} e S_{12} é a estratégia : {Não Confessar}.

Para o jogador i = 2, o conjunto de estratégias é dado por ε_2={S_{21}, S_{22} }, onde S_{21} é a estratégia : {Confessar} e S_{22} é a estratégia : {Não Confessar}.

A partir da Tabela 9 obtém-se os valores da função π_1:

Figura 8 – Recompensas do jogador 1: Jogador A

$\pi_1 (S_{11} , S_{21})$ = -5	$\pi_1(S_{11} , S_{22})$ = 0*
$\pi_1(S_{12} , S_{21})$ = -5	$\pi_1(S_{12} , S_{22})$ = 0

Fonte: Autora (2021)

Onde 0* se refere a ter uma recompensa que não é descrita em valores reais, e 0* > 0.

Analogamente em azul os valores da função π_2 :

Figura 9 - Recompensas do jogador 2: Jogador B

$\pi_2 (S_{21} , S_{11})$ = -5	$\pi_2(S_{22} , S_{11})$ = -5
$\pi_2(S_{21} , S_{12})$ = 0*	$\pi_2(S_{22} , S_{12})$ = 0

Fonte: Autora (2021)

Onde 0* se refere a ter uma recompensa que não é descrita em valores reais, e 0* > 0.

Uma estratégia S_{1j}^{*} do jogador i = 1 é a melhor resposta em relação ao outra estratégia de S_{1j}^{**} do mesmo jogador se :

$$\pi_i (S_i^* , S_{-i}) \geq \pi_i (S'_i , S_{-i}) \text{ para algum } S_{-i} \text{ e todo } S'_i \neq S_i^*$$

Ao comparar os valores da função reais π_1, obtidos da tabela, nota-se que a estratégia S_{21} do jogador i = 1, mostra-se mais vantajosa do que S_{22}, para este jogador, tem-se desta forma que a estratégia S_{21} é fracamente dominante em relação à estratégia S_{22}, ou seja, a estratégia: {Confessar}é fracamente dominante em relação à estratégia: {Não Confessar}.

Figura 10 - Recompensas do jogador 1 : Jogador A

$\pi_1 (S_{11} , S_{21})$ = -5	$\pi_1(S_{11} , S_{22})$ = 0*
$\pi_1(S_{12} , S_{21})$ = -5	$\pi_1(S_{12} , S_{22})$ = 0

Fonte: Autora (2021)

Tem-se que:

$\pi_1\,(S_{11}\,, S_{21}\,)$ = -5 ≥ $\pi_1(S_{12}\,, S_{21}\,)$ = -5;

$\pi_1(S_{11}\,, S_{22}\,)$ = 0* ≥ $\pi_1(S_{12}\,, S_{22}\,)$ = 0.

A estratégia do Jogador B:

A partir da tabela 9 obtém-se os valores da função π_2:

Figura 11 - Recompensas do Jogador 2: Jogador B

$\pi_2\,(S_{21}\,, S_{11}\,)$ = -5	$\pi_2(S_{22}\,, S_{11}\,)$ = -5
$\pi_2(S_{21}\,, S_{12}\,)$ = 0*	$\pi_2(S_{22}\,, S_{12}\,)$ = 0

Fonte: Autora (2021)

Tem-se que:

$\pi_2\,(S_{21}\,, S_{11}\,)$ = -5 ≥ $\pi_2(S_{22}\,, S_{11}\,)$ = -5;

$\pi_2(S_{21}\,, S_{12}\,)$ = 0* ≥ $\pi_2(S_{22}\,, S_{12}\,)$ = 0.

Uma estratégia S_{2j}^{*} do jogador i = 2 é a melhor resposta em relação ao outra estratégia de S_{2j}^{**} do mesmo jogador se :

$$\pi_i(S_i^*\,, S_{-i}\,) \geq \pi_i(S'_i\,, S_{-i}\,) \text{ para algum } S_{-i} \text{ e todo } S'_i \neq S_i^*$$

Como pode ser visto, a estratégia S_{11} mostra-se mais vantajosa do que S_{12}, para este jogador, tem-se desta forma que a estratégia S_{11} é fracamente dominante em relação à estratégia S_{12} , ou seja, a estratégia: {Confessar} é fracamente dominante em relação à estratégia : {Não Confessar}

Como os jogadores A e B, têm as mesmas estratégias e consequências, portanto, tem como escolha mais vantajosa a estratégia: {Confessar}, dá o par ordenado {Confessar, Confessar}, e é aqui que será encontrado o equilíbrio de Nash, onde a as melhores escolhas dos jogadores coincidem em uma mesma entrada (par ordenado).

Posta toda a teoria anterior, têm-se instrumentos matemáticos para a compreensão do dilema do prisioneiro e o jogo da caça ao cervo: dilema do contrato social.

5. O Jogo da Caça ao Cervo: O Dilema do Contrato Social

Segundo Fiani (2009), Jean-Jacques Rousseau (1712 - 1778) gerou a formulação do dilema do contrato social, através do jogo caça ao cervo, apesar de não ter apresentado a situação que originou a caça ao cervo como um jogo, e sim como um problema, esse dilema vem se tornando muito conhecido entre os cientistas sociais que estudam o contrato social, Rousseau cita que:

> Em sua concepção mais usual, o contrato social designa o “contrato” que os indivíduos fariam implicitamente para viver em sociedade. Nesse contrato implícito os indivíduos definiram seus direitos e deveres de forma a tornar possível a vida em sociedade. O estado seria o agente encarregado de garantir contrato social. (ROUSSEAU, J-J., Discurso sobre a Origem e os Fundamentos da Desigualdade entre Os Homens, da Coleção Os Pensadores, 1978, p.261 apud FIANI, 2009, p.113).

Fiani (2009) comenta no trecho seguinte que se os jogadores tivessem oportunidade de ganhos pela cooperação, os indivíduos se reuniram em associação, mas que o vínculo poderia ser frágil, e só duraria enquanto houvesse ganhos, caso não pensassem a longo prazo.

> Caso houvesse a possibilidade de ganhos pela cooperação mútua, os homens uniam-se em bandos, ou qualquer outro tipo de associação. Os vínculos nessa situação, todavia, eram frágeis: a cooperação durava apenas enquanto a oportunidade que lhe dera origem existia. (FIANI, 2009, p.81-82).

O jogo que pode descrever essa situação é o jogo de caça ao cervo, pois nele ambos os jogadores têm um objetivo em comum, caçar o cervo para dividir, porém se ocorresse a oportunidade de aparecer uma lebre para um deles, este jogador abandonaria o outro jogador e a caçada inicial, e partiria em busca da lebre, sendo ela mais fácil de capturar, e ele poderia esconder para que o outro caçador não veja, sendo ela menor, e ficar com a caça somente para si, sem se importar, se o outro jogador irá ou não conseguir algum ganho.

5.1. Jogo da Caça ao Cervo

Neste jogo, dois caçadores partem na caçada de um cervo, que é um animal de grande porte e ágil, o que implicaria que um caçador sozinho não daria conta de pegar, sendo assim, teria que ser ambos a caçá-lo (em uma situação real, teria que ter mais caçadores, porém o problema só cita dois a fim de ilustrar a situação).

Para que consigam atingir seus objetivos, é preciso que cada caçador ocupe uma posição no bosque e fique atento ao seu objetivo, capturar o cervo; e assim que capturado dividir a caça pela metade entre eles. Mas no período em que está no bosque, o caçador pode aproveitar para caçar uma lebre, que é um animal mais fácil de ser capturado do que o cervo, porém tem uma quantidade muito menor de carne do que o cervo, e apenas um caçador conseguiria capturá-la.

Se um dos dois caçadores seguir a lebre e deixar sua posição, o cervo escapa, mas o que capturou a lebre não precisa dividi-la com o outro caçador (ele pode guardar a caça de maneira que o outro não veja), porém aquele que ficou fiel ao objetivo inicial não obterá a carne do cervo.

Os ganhos da caçada são dados da seguinte maneira: "metade de um cervo possuem três vezes mais valor para os caçadores, dados a quantidade de carne e seu sabor, do que uma lebre", ou seja, tem-se uma proporção de 3:1 (valores numéricos simbólicos, para representar o problema), da carne de cervo em relação a carne da lebre. Aquele que permaneceu fiel ao objetivo inicial, enquanto o outro caçador foi em busca da lebre (capturando-a e omitindo, ficando com a carne da lebre somente para si), não capturou nenhuma caça, e, portanto, ficou sem nenhuma carne, para representar na tabela será usado o valor simbólico de 0.

Na Tabela 11 segue a representação:

TABELA 10 : O JOGO DA CAÇA AO CERVO

		Caçador B	
		Cervo	Lebre
Caçador A	Cervo	3, 3	0, 1
	Lebre	1, 0	1, 1

Fonte: FIANI, Ronaldo (p.114)

Nesse jogo, se ambos os caçadores colaborarem e se mantiverem e em seus postos, eles obteriam o melhor resultado possível, o valor simbólico de 3 de recompensa.

Se um deles deixar o posto obterá a lebre, com o valor simbólico de 1 de recompensa e outro zero. Se ambos saírem de seus postos terão o valor simbólico de 1 de recompensa (supondo que a lebre vale um terço do valor do cervo).

Nesse jogo há dois equilíbrios de Nash, um onde ambos ficam em suas posições e de olho no cervo, obtendo o valor simbólico de 3 de recompensa cada um; e o outro onde ambos abandonam suas posições e obtêm o valor simbólico de 1 de recompensa cada um.

Essa situação de interação estratégica representa aquela que o melhor resultado é obtido quando há a cooperação de todos, e que se um deles buscar o melhor resultado individual, prejudica aquele que se manteve fiel ao compromisso inicial. (FIANI, 2009, p.115).

Algebricamente tem-se:

Jogadores:

1. Caçador A (Jogador 1);

2. Caçador B (Jogador 2).

Estes jogadores serão denotados pela variável *i* = 1, 2.

Cada jogador i, para *i* = 1 ou *i* = 2, tem um conjunto de estratégias, que será chamado de ε_i, além disso, a variável S_{-i} , denota as estratégias de todos os jogadores, exceto às do jogador i.

No exemplo acima:

Para o jogador i = 1, o conjunto de estratégia é dado por $\varepsilon_1 = \{S_{11}, S_{12}\}$, onde S_{11} é a estratégia: {Caçar o Cervo} e S_{12} é a estratégia : {Caçar a Lebre}.

Para o jogador *i* = 2, o conjunto de estratégias é dado por $\varepsilon_2 = \{S_{21}, S_{22}\}$, onde S_{21} é a estratégia : {Caçar o Cervo} e S_{22} é a estratégia : {Caçar a Lebre}.

A partir da Tabela 11 obtém-se os valores da função π_1,em azul:

Figura 12 – Recompensas do Jogador 1 : Caçador A

$\pi_1(S_{11}, S_{21}) = 3$	$\pi_1(S_{11}, S_{22}) = 0$
$\pi_1(S_{12}, S_{21}) = 1$	$\pi_1(S_{12}, S_{22}) = 1$

Fonte: Autora (2021)

Analogamente têm-se os valores da função π_2 , em vermelho:

Figura 13 - Recompensas do Jogador 2 : Caçador B

$\pi_2 (S_{21}, S_{11}) = 3$	$\pi_2(S_{22}, S_{11}) = 1$
$\pi_2(S_{21}, S_{12}) = 0$	$\pi_2(S_{22}, S_{12}) = 1$

Fonte: Autora (2021)

Olhando as Estratégias do Caçador 1:

Tem-se que:

$\pi_1(S_{11}, S_{21}) = 3 \geq \pi_1(S_{12}, S_{21}) = 1$;

$\pi_1(S_{11}, S_{22}) = 0 \geq \pi_1(S_{12}, S_{22}) = 1$ (não é uma relação verdadeira).

Ou seja, o ganho do jogador 1, é condicionado ao que o jogador 2 optar como estratégia.

Ao comparar os valores das funções reais π_1, obtidos da Tabela 11, nota-se que a estratégia S_{11} do jogador *i* = 1, mostra-se mais vantajosa do que a estratégia S_{12}, se o jogador *i* = 2 escolher como estratégia S_{21}, ou seja, a estratégia: {Caçar o Cervo}; porém se o jogador *i* = 2 optar pela estratégia S_{22}, ou seja, a estratégia: {Caçar a Lebre}, tem-se que a estratégia S_{12} do jogador *i* = 1, mostra-se mais vantajosa do que a estratégia S_{11}.

A partir da tabela 11 obtém-se os valores da função π_2 :

Tem-se que:

$\pi_2 (S_{21}, S_{11}) = 3 \geq \pi_2(S_{22}, S_{11}) = 1$;

$\pi_2(S_{21}, S_{12}) = 0 \geq \pi_2(S_{22}, S_{12}) = 1$ (não é uma relação verdadeira).

Ou seja, o ganho do Jogador 2, é condicionado ao que o Jogador 1 optar como estratégia.

Como pode ser visto, a estratégia S_{21} do jogador *i* = 2, mostra-se mais vantajosa do que S_{22}, para este jogador, se o jogador i = 1 escolher como estratégia S_{11}, ou seja, a estratégia: {Caçar o Cervo}; porém se o jogador *i* = 2 optar pela estratégia S_{12}, ou seja, a estratégia: {Caçar a Lebre}, tem-se que a estratégia S_{22} do jogador i = 2, mostra-se mais vantajosa do que a estratégia S_{21}.

Como os Jogadores A e B, têm as mesmas estratégias e consequências, pode-se notar que eles possuem dois pares de estratégias em que ocorre o equilíbrio de Nash, onde se tem a estratégia: {Caçar o Cervo, Caçar o Cervo} e a estratégia: {Caçar a lebre, Caçar a lebre}, onde ou ambos se mantêm fiéis ao objetivo inicial, ou ambos vão em busca da lebre.

Nesse cenário pode-se perceber que o maior ganho é em caso de cooperação de todos os jogadores, caso um busque um ganho individual, o outro será prejudicado.

5.2. Jogo Inspirado no Jogo de Caça ao Cervo

Na proposta da atividade, será feita uma adaptação do jogo de caça ao cervo, colocando o problema central de cooperação mútua com outro cenário, mais condizente ao ambiente escolar. No apêndice C, se encontra o material do professor, e no apêndice D, o material do aluno.

Segue o dilema proposto: Dilema do contrato social.

Suponha que dois alunos se reuniram para fazer uma atividade escolar com 50 exercícios de matemática. Sendo a atividade trabalhosa e extensa, nenhum dos dois conseguiriam fazer todos os exercícios sozinhos a tempo de entregar para o professor, precisando assim se ajudarem entre si.

Para que o trabalho se conclua com nota máxima é necessário que dividam os exercícios para que consigam entregar (todos os exercícios) na data pedida pelo professor. Na dupla, se cada um fizer 25 exercícios e juntar os exercícios (num total de 50 exercícios), tirariam nota 10; porém, se entregarem individualmente 15 exercícios, tendo assim um menor esforço, tiraram nota 5, mas não teria como avisar o colega a tempo, e ele fazendo os 25 exercícios tiraria nota 7.

Na resolução do dilema acima, poderá ser observado se os alunos compreenderam os conceitos matemáticos envolvidos no dilema do prisioneiro, visto anteriormente, e se eles utilizaram na resolução do problema.

A atividade envolve a ideia de cooperação e de como a tomada de decisão de um indivíduo, influência nos resultados do outro.

Para guiar as reflexões dos alunos, se propõe as seguintes perguntas:

1) Se ambos não se esforçam, o que ocorre?
2) Se um não se esforça, o que acontece com o outro?
3) Se ambos se esforçam, o que ocorre?

4) Monte uma tabela com os resultados do Jogo.
5) Este jogo possui uma decisão em conjunto benéfica para ambos? Se sim, qual?
6) O que você pensa da seguinte frase: “O melhor resultado depende da cooperação de todos. Se alguém buscar um resultado individual mais imediato, aqueles que se mantiverem fiéis ao compromisso inicial serão prejudicados.”

A seguir o desenvolvimento matemático do dilema do contrato social.

TABELA 11 : DILEMA DO CONTRATO SOCIAL

		Aluno B	
		Entregar 15 Exercícios	Entregar 25 Exercícios
Aluno A	Entregar 15 Exercícios	5, 5	5, 7
	Entregar 25 Exercícios	7, 5	10, 10

Fonte: Autora (2021)

Algebricamente tem-se:

Jogadores:

1. Aluno A (Jogador 1);
2. Aluno B (Jogador 2).

Estes jogadores serão denotados pela variável i = 1, 2.

Cada jogador i, para i = 1 ou i = 2, tem um conjunto de estratégias, que será chamado de ε_i, além disso, a variável S_{-i}, denota as estratégias de todos os jogadores, exceto às do jogador i.

No exemplo acima:

Para o jogador i = 1, o conjunto de estratégia é dado por $\varepsilon_1 = \{S_{11}, S_{12}\}$, onde S_{11} é a estratégia: {Entregar 15 Exercícios} e S_{12} é a estratégia : {Entregar 25 Exercícios}.

Para o jogador i = 2, o conjunto de estratégias é dado por $\varepsilon_2 = \{S_{21}, S_{22}\}$, onde S_{21} é a estratégia : {Entregar 15 Exercícios} e S_{22} é a estratégia : {Entregar 25 Exercícios}.

A partir da Tabela 12 obtém-se os valores da função π_1 em azul:

Figura 14 - Recompensas do jogador 1 : Aluno A

$\pi_1\ (S_{11}\,, S_{21}\,)\ = 5$	$\pi_1(S_{11}\,, S_{22}\,)\ = 5$
$\pi_1\ (S_{12}\,, S_{21}\,) = 7$	$\pi_1(S_{12}\,, S_{22}\,) = 10$

Fonte: Autora (2021)

Analogamente tem-se os valores da função π_2 em vermelho:

Figura 15 : Recompensas do jogador 2 : Aluno B

$\pi_2\,(S_{21}, S_{11}\,) = 5$	$\pi_2(S_{22}\,, S_{11}) = 7$
$\pi_2(S_{21}, S_{12}\,) = 5$	$\pi_2(S_{22}\,, S_{12}) = 10$

Fonte: Autora (2021)

A estratégia do Jogador 1 :

Tem-se que:

$\pi_1(S_{12}\,, S_{21}\,) = 7 \geq\ \pi_1\,(S_{11}\,, S_{21}\,)\ = 5;$

$\pi_1(S_{12}\,, S_{22}\,) = 10 \geq\ \pi_1(S_{11}\,, S_{22}\,)\ = 5.$

Pode-se perceber que a estratégia S_{12} mais vantajosa é em relação estratégia S_{11} .

A estratégia do Jogador 2:

Tem-se que:

$\pi_2(S_{22}\,, S_{11}\,) = 7 \geq\ \pi_2\,(S_{21}\,, S_{11}\,) = 5;$

$\pi_2(S_{22}\,, S_{12}\,) = 10 \geq\ \pi_2(S_{21}\,, S_{12}\,) = 5.$

Como pode ser visto, a estratégia S_{22} mostra-se mais vantajosa do que a S_{21} para o Jogador 2.

Como os Jogadores 1 e 2, têm as mesmas estratégias e consequências, pode-se notar que eles possuem um par de estratégias em que ocorre o equilíbrio de Nash, onde tem-se a estratégia: {Entregar 25 Exercícios, Entregar 25 Exercícios}.

6. Dilema do Prisioneiro

O dilema do prisioneiro foi sugerido pelos matemáticos Merril Flood e Melvin Dresher em 1950, da Empresa Rand, e usado por Albert W. Rickettsiose, que era mentor de Nash na Universidade de Princeton. O dilema do prisioneiro foi utilizado para exemplificar a utilização da teoria dos jogos, para uma plateia formada por psicólogos . (PEREIRA, 2014).

O dilema do prisioneiro é um jogo com 2 jogadores que têm os mesmos ganhos, mesmas consequências e estratégias, as jogadas de um participante são baseadas nas escolhas do outro, a fim de obter o maior lucro possível para si. (PEREIRA, 2014).

Segue o jogo do dilema do prisioneiro, apresentado por Pereira (2014) na sua monografia, este contém pequenas variações do descrito por Fiani (2009), mas tem a mesma essência.

Dois comparsas são presos, Antônio e Bruno, eles são suspeitos de um crime grave e a polícia não tem provas que sejam o bastante para condená-los, mas tem para deixá-los na prisão por um crime menor. Quando chegam na delegacia, eles são separados em celas distintas e o promotor oferece para os dois, o mesmo acordo: Se um dos prisioneiros testemunhar para a promotoria contra o outro, e este permanecer calado, aquele que testemunhou (traidor) ficará livre da cadeia e o cúmplice, que ficou calado, pegará 10 anos de prisão. Se ambos ficarem calados, cada um será condenado a um ano de prisão, se os dois testemunharem para a promotoria (se traírem) cada um ficará cinco anos na prisão. (PEREIRA, 2014).

TABELA 12 : JOGO DILEMA DO PRISIONEIRO

		BRUNO	
		CONFESSA	NÃO CONFESSA
ANTÔNIO	CONFESSA	- 5, -5	0, -10
	NÃO CONFESSA	- 10, 0	-1, -1

Fonte: PEREIRA, Silvio (2014, p.41)

O jogo ocorre de maneira simultânea e cada jogador não tem acesso ao que seu parceiro decidiu, o objetivo é que cada jogador escolha o melhor resultado para si, que seria ficar o menor tempo preso, independente do que o parceiro escolha.

As escolhas devem se basear apenas na lógica, deixando qualquer aspecto subjetivo do sujeito de fora dessa decisão.

Para Pereira (2014) a escolha que beneficiaria ambos os comparsas, seria colaborar entre si, não confessando e ficando apenas um ano preso cada um; mas eles estão em salas separadas e não podem combinar suas decisões (e se combinasse, não teriam garantias de que o outro fosse seguir com o acordado entre eles), neste caso, devem agir racionalmente, buscando o melhor para si, e considerando as possíveis escolhas do parceiro.

Se um dos jogadores acreditasse que o outro fosse testemunhar para a promotoria (confessar), o melhor a se fazer seria confessar também e ficar cinco anos presos, pois caso ficasse calado ficaria dez anos na prisão. Se o outro jogador ficar calado, a melhor opção individual é confessar, porque nesse caso iria ficar livre e não pegar um ano de prisão. Em ambos os casos, a melhor escolha individual é confessar, porém o outro jogador que também é racional, e irá chegar na mesma conclusão, o que pode fazer com que ambos confessem e peguem 5 anos presos cada um, isso é o perfil de estratégia: {Confessar, Confessar}, o qual é chamado equilíbrio de Nash, que é "a melhor decisão possível levando-se em conta a decisão que o outro tomará", este modelo matemático foi proposto por Von Neumann e Morgenstern.

Pereira (2014) levanta que socialmente é difícil ter uma previsibilidade do que irá ocorrer, de como os jogadores irão agir, se irão confiar ou não no parceiro, considera a hipótese que uma conversa entre eles poderia favorecer a cooperação mútua e mudar o rumo das escolhas.

Pereira (2014) aplicou o jogo do dilema do prisioneiro em três turmas de 3º ano do ensino médio, em uma escola estadual localizada no Rio de Janeiro, ele realizou sua pesquisa teórica em parceria com o pesquisador Nascimento (2014) e ambos os trabalhos trazem a temática de teoria dos jogos no ensino médio e algumas aplicações de jogos clássicos, como é o caso do dilema do prisioneiro; porém as pesquisas foram aplicadas em escolas diferentes. Pereira dividiu cada sala, em dois grupos, o grupo do prisioneiro Antônio e o grupo do prisioneiro Bruno; ele traz que inicialmente o sentimento de negação era forte conforme começou a atividade, e que a tendência era não confessar, pois seria considerado uma traição. Cada aluno fez uma escolha, e depois foram formadas duplas de Antônios e de Brunos aleatoriamente. Os resultados obtidos na primeira turma com 10 duplas formadas foram: 5 duplas tiveram a estratégia: {Confessar, Confessar}, 1 dupla teve a estratégia: {Confessar, Não

Confessar}, 2 duplas tiveram a estratégia: {Não Confessar, Confessar} e 2 duplas teve a estratégia: {Não Confessar, Não Confessar}; na segunda turma com 12 duplas formadas: 5 duplas tiveram a estratégia: {Confessar, Confessar}, 3 duplas tiveram a estratégia: {Confessar, Não Confessar}, 3 duplas tiveram a estratégia: {Não Confessar, Confessar} e 1 dupla teve a estratégia: {Não Confessar, Não Confessar}; e na terceira turma com 14 duplas formadas fora: 4 duplas tiveram a estratégia: {Confessar, Confessar}, 4 duplas tiveram a estratégia: {Confessar, Não Confessar}, 4 duplas tiveram a estratégia: {Não Confessar, Confessar} e 2 duplas tiveram a estratégia: {Não Confessar, Não Confessar}. Somando as três turmas (36 duplas formadas) se obteve: 14 duplas tiveram a estratégia: {Confessar, Confessar}, 17 duplas tiveram a estratégia: {Não Confessar, Não Confessar} ou {Confessar, Não Confessar}, e 5 duplas tiveram a estratégia: {Não Confessar, Não Confessar}. Ou seja, tem um total de 72 alunos, 27 alunos não confessam e 45 alunos confessam. Após isso, foi mostrado o problema na lousa, em forma de tabela, e explicada a melhor estratégia individual. Também foi posto que a decisão de confessar não teria relação com lealdade ao parceiro (justificativa levantada por um aluno, do porquê escolheu não confessar).

Dado que a escolha racional seria a estratégia: {Confessar, Confessar} e, somente 14 das 36 duplas tomaram essa decisão, leva a supor que há outros fatores, além da lógica, que guiaram as escolhas dos alunos.

Nascimento (2014) realizou uma atividade semelhante em duas turmas de 2° ano de ensino médio, no período da noite, no bairro da Taquara, na cidade localizada no Rio de Janeiro.

Ele pontua que deve se levar em consideração as dificuldades de aprendizagem dos alunos, provenientes de muitos fatores como aprovação automática da rede pública, falta de estrutura familiar, entre outros elementos. (NASCIMENTO, 2014, p.39).

Na aplicação da atividade, Nascimento (2014) adotou sistema semelhante ao de Pereira (2014), com a diferença que pela dinâmica organizacional do dia na escola, ele teve que juntar ambas as turmas e fazer de forma única, nesta atividade participaram 40 alunos, sendo 19 alunos de uma turma e 21 alunos de outra turma. Os resultados obtidos foram: 5 duplas tiveram a estratégia: {Confessar, Confessar}, 3 duplas tiveram a estratégia: {Confessar, Não Confessar}, 5 duplas tiveram a estratégia: {Não Confessar, Confessar} e 7 duplas teve a estratégia: {Não Confessar, Não Confessar}.

Na Análise de Nascimento (2014) ele traz que:

> Nesta atividade, a turma ficou bastante agitada, pois o jogo tem como ideia central o fato de dois prisioneiros terem de confessar um crime podendo um prejudicar o outro, fato não muito aceito na comunidade onde moram os alunos participantes da atividade. (NASCIMENTO, 2014, p.47).

Dos resultados obtidos, somente 5 duplas optaram por estratégias tidas como soluções racionais, as demais mesmo que Nascimento (22014) explicasse na lousa a matriz dos resultados e qual era a estratégia dominante de cada jogador, os alunos mantiveram as escolhas iniciais, "diziam que não valia a pena confessar, pois caso a dupla não confessasse pegariam apenas um ano de prisão, o que seria muito bom." (NASCIMENTO, 2014)

As dissertações de Nascimento (2014) e Pereira (2014) evidenciaram fatores, lealdade e medo, externos à lógica matemática e que contribuem na tomada de decisão dos alunos. Na tentativa de evidenciar outros fatores externos à lógica, que contribuem na tomada de decisão ou reforçar os fatores achados, busca-se na literatura outras fontes de informação sobre as emoções. Porém, por se tratar de um tema vasto, não se fez um estudo aprofundado, de maneira a não fugir do escopo do trabalho.

Para Gouveia (2018) o emocional pode influenciar no raciocínio lógico e na forma de tomar decisões, como exemplo, ele cita uma pessoa que tem medo de altura e opta por viajar de carro ao invés de avião. Apesar da probabilidade de um acidente aéreo ser estatisticamente menor, que a probabilidade de um acidente rodoviário (GIGERENZER apud GOUVEIA, 2018, p.17), ela faz essa escolha baseada no medo e não nos dados e análises lógicos que envolvem a situação. Gouveia cita que:

> Emoções disposicionais ou incidentais, como a ira e o medo, têm efeitos opostos em relação ao risco. Pessoas iradas tendem a preferir o risco, enquanto pessoas com medo tendem a evitá-lo. (LERNER & KELTNER apud GOUVEIA, 2018, p.18).

Dado o exposto, supõe-se que as respostas que os alunos apresentaram nas atividades propostas por Nascimento (2014) e Pereira (2014), foram afetadas por fatores emocionais como o medo, que é associado à incerteza e à falta de controle de uma dada situação. O medo faz o indivíduo tomar decisões evitando riscos, desta forma, fazendo uma analogia com os alunos e o contexto sociocultural no qual estão inseridos, era mais favorável evitar os riscos que uma delação poderia trazer a longo prazo.

Gouveia (2018) em sua dissertação cita alguns autores que realizaram pesquisas sobre a relação entre as emoções e as tomadas de decisões, entre eles está Blanchette & Richards (2010), Oaksford, Morris, Grainger & Williams (1996), Randenhauser & Anker (1988) e Melton (1995); nos estudos desses autores foi observado que emoções, tanto as positivas como as negativas, interferem de maneira negativa em uma resposta lógica a silogismos categoriais (problemas de lógicas que são dedutíveis), estes em comparação com indivíduos em um estado de humor neutro. Para Lerner & Keltner (apud Gouveia, 2018, p.18).

> Emoções incidentais influenciaram as avaliações cognitivas dos problemas feitas pelos participantes, assim como as decisões subsequentes. Assim, uma pessoa que se

> sinta ansiosa face ao resultado de uma escolha arriscada poderá escolher uma opção mais segura e conservadora em vez de uma opção potencialmente mais lucrativa, mas arriscada; enquanto que, uma pessoa que sinta irá devido, por exemplo, ao facto de estar a viver circunstâncias financeiras que considera injustas (e.g., perda de emprego) poderá estar mais determinada a enfrentar mais riscos.

Entre os autores que Gouveia (2018) cita, chama a atenção Blanchette & Richards (2004), mencionando não somente o estado emocional do indivíduo, mas também a natureza da atividade. Tarefas lógicas de caráter neutro, tendem a ter uma resposta mais lógica (dedutiva), do que aquelas que carregam uma carga emocional, como é o caso do dilema do prisioneiro, a decisão de um jogador impacta o outro, e vice e versa. Entretanto vale ressaltar que Blanchette & Campbell (2012), prosseguiram com estudos nessa área e realizaram pesquisas com veteranos de guerra, em atividades de raciocínio com silogismos que também envolviam temas referentes a combates (que é um assunto com um forte apelo emocional, em especial para estes indivíduos que vivenciaram essa realidade), e eles obtiveram uma resposta mais satisfatória segundo os autores, exceto aqueles cujas as experiências foram mais intensas, do que as atividades com silogismos neutros; isso nos mostra que há indícios que se contrapõe sobre a relação de emoções e tomadas de decisões; a pesquisa de Blanchette & Campbell (2012) relacionou as emoções, as crenças e a lógica; suas tarefas foram realizadas da seguinte maneira:

> [4]Tarefa de raciocínio. Os silogismos foram preparados com base em oito algarismos diferentes (quatro válidos, quatro inválidos). Cada figura foi apresentada com cada um dos três tipos de conteúdo: neutro, geralmente emocional e emocional relacionado ao combate. Para cada uma dessas 24 possibilidades, duas versões foram criadas, uma com conclusões críveis e uma com conclusões inacreditáveis. (BLANCHETTE & CAMPBELL, 2012, p.4).

Eles foram expostos a silogismos neutros críveis como “alguns chás são substâncias naturais” e não-críveis como “alguns chás são sólidos”, um exemplo de silogismo geralmente emocional crível é “alguns pedófilos são padres” e não-crível como “alguns pedófilos são nobres”, e um exemplo de silogismo emocional específico crível é “algumas vítimas infantis são uma parte esperada da guerra” e não-crível como “algumas vítimas infantis não são angustiantes”; na análise foi classificado como resultados aos silogismos como “congruentes (válidos e conclusões críveis, inválidas e inacreditáveis conclusões) ou incongruentes (inválidos e crentes, válido e inacreditável).” (Blanchette & Campbell, 2012, p.4). Também foram atribuídas pontuações para as respostas dadas.

[4] Reasoning task. Syllogisms were prepared based on eight different figures (four valid, four invalid). Each figure was presented with each of three content types: neutral, generally emotional, and combat-related emotional. For each of these 24 possibilities, two versions were created, one with believable and one with unbelievable conclusions. (BLANCHETTE & CAMPBELL, 2012, p.4).

Em suas conclusões os autores trazem que a vantagem dos veteranos em raciocinar não é derivada da familiaridade ao invés da emoção, nas respostas das tarefas; em especial porque os ex-combatentes que tiveram uma experiência mais intensa obtém uma resposta inferior aos demais ex-combatentes. Também traz que

> [5]Esses participantes tendem a raciocinar sobre problemas relacionados ao combate emocional da mesma forma que eles raciocinaram sobre os problemas neutros. Isso mostra que as experiências de guerra têm um efeito profundo na maneira como as pessoas são capazes de desenhar inferências lógicas. (BLANCHETTE & CAMPBELL, 2012, p.8).

Ou seja, há uma dessensibilização para algumas respostas a temas mais emocionais.

Ao olhar os trabalhos acima, pode-se perceber que as emoções assumem um papel na percepção das situações e contribuem na tomada de decisões de um indivíduo, e este nem sempre opta por escolhas que seriam apenas lógicas e racionais.

As atividades que foram idealizadas durante o desenvolvimento deste trabalho, se encontram nos apêndices, além do desenvolvimento teórico do jogo caça ao cervo: o dilema do contrato social.

[5] These participants tended to reason about emotional combat-related problems in the same way they reasoned about neutral problems. This shows that war experiences have a profound effect on the way people are able to draw logical inferences. This deficit was not generalised, but specific to war-related topics.(BLANCHETTE & CAMPBELL, 2012, p.8)

7. Propostas de Atividades

Com base nas dissertações de Nascimento (2014) e Pereira (2014), foram elaboradas e adaptadas duas atividades com potencial de aplicação em sala de aula, atividade 1: o dilema do prisioneiro e a atividade 2: o dilema do contrato social, a apresentação dos dilemas e os desenvolvimentos algébricos estão descritos nos capítulos 4 e 5, seção 4.7. Equilíbrio de Nash e seção 5.2. Jogo inspirado no jogo da caça ao cervo, respectivamente.

As atividades têm como público-alvo alunos do ensino médio, de escolas públicas de Diadema, e sugere-se que seja aplicado em conjunto à professores de outras disciplinas, como sociologia, filosofia, geografia e história; Para que possam auxiliar na intepretação dos anseios que os alunos trazem durante a atividade, e quais outros fatores podem influenciar na tomada de decisão. Podendo estender o debate para outras áreas de conhecimento, além da matemática.

Nas seções seguintes, serão descritas as dinâmicas das duas atividades propostas. As atividades são encontradas nos apêndices desse trabalho, divididas em material direcionado aos professores e material para ser entregue aos alunos.

7.1. Proposta de Atividade 1: O Dilema do Prisioneiro

A atividade proposta elaborada para este trabalho, é uma modificação do dilema do prisioneiro e está embasada no livro de teoria dos jogos Fiani (2009), nas dissertações de Nascimento (2014) e Pereira (2014).

Este jogo foi pensado como uma possível atividade a ser desenvolvida em sala de aula, com a intenção de apresentar um jogo clássico da teoria dos jogos, destacando alguns elementos importantes desta teoria e proporcionando um espaço de discussão sobre os fatores que influenciam na tomada de decisão. A atividade que se propõe, o jogo do dilema do prisioneiro, poderá ser realizada com alunos do 2º ano do ensino médio, observando como eles associam a lógica matemática com sua realidade, e quais possíveis questionamentos podem ser levantados.

Estima-se que a atividade dure em torno de 45 minutos, a turma deverá ser dividida em duplas, e cada aluno da dupla irá representar um jogador. Uma folha com a atividade 1, apêndice B, deverá ser entregue a cada dupla. A leitura do atividade 1 será feita de maneira coletiva, após a leitura, cada aluno irá oralizar para a turma, qual será a sua decisão frente ao dilema, confessar ou não confessar, em seguida, o(a) professor(a) marcará na lousa a decisão de cada dupla, após marcar na lousa, seguidamente os alunos poderão verbalizar os motivos que os levou à suas decisões, após isso será mostrado na lousa, em forma de tabela a questão proposta, resultando na Tabela 9, e como isso pode ajudar a visualizar as possíveis escolhas, e qual seria a melhor escolha individual e a melhor escolha pensando na dupla, e o que seria equilíbrio de Nash.

Como mencionado no capítulo acima, a atividade foi levemente mudada, além do jogador ganhar uma recompensa, ele não tem nenhuma penalidade. O intuito para realizar essa mudança, foi estimular os jogadores a delatar seu colega. Se o jogador A (ou B) escolher delatar, ele poderá além de sair livre, ganhar uma recompensa. Porém, as escolhas dos alunos podem não estar baseadas apenas na lógica, pensando no contexto social e local nos quais estão inseridos, o fator subjetivo pode falar mais alto, algo semelhante ao que Nascimento (2014) e Pereira (2014) relataram em alguns comentários em seus trabalhos.

Deixando de lado o contexto social, a melhor escolha lógica individual seria delatar o comparsa e ainda ganhar uma recompensa, porém, quando se está em uma escola pública de área periférica (público-alvo desta atividade), em que o contrato social tácito que rege as comunidades é que um delator não é bem-visto, e muitas vezes nem tolerado, mesmo que tivesse um elemento que favorece a denúncia, ela não seria feita. Um dos questionamentos que pode ser levantado é: será que a norma social local falaria mais alto? Será que os alunos decidiram que o melhor a se fazer é se manter calado em uma decisão como essa?

Dayrell (1996) comenta em seu trabalho que os alunos trazem vivências prévias e paralelas à escola, como nesse trecho: “os alunos chegam à escola marcados pela diversidade, reflexo dos desenvolvimentos cognitivo, afetivo e social, evidentemente desiguais, em virtude da quantidade e qualidade de suas experiências e relações sociais, prévias e paralelas à escola.” (DAYRELL, 1996).

Essas experiências influem em sua percepção de mundo e em suas tomadas de decisão; experiências essas como:

> Nesse sentido, os alunos vivenciam experiências de novas relações na família, experimentam morar em diferentes bairros, num constante reiniciar as relações com grupos de amigos e formas de lazer. Passam a trabalhar muito cedo em ocupações as mais variadas. Alguns ficam com o salário, outros, a maioria, já o dividem com a família. Aderem a religiões diferentes, pentecostais, católicos, umbandistas,etc. O lazer é bem diferenciado, quase sempre restrito, devido à falta de recursos. (DAYRELL, 1996, p.7).

7.2. Proposta de Atividade 2: O Dilema do Contrato Social

Assim como no caso do jogo do caça ao cervo, tem que o dilema do contrato social o maior ganho é em caso de cooperação de todos os jogadores, caso um busque um ganho individual, o outro será prejudicado.

Nesse dilema, alguns fatores podem influenciar nessa escolha, na capacidade de cooperar ou não, podendo ser a busca pelo melhor resultado possível dentre as estratégias, de menor esforço individual, de lealdade, de empatia. Deve-se considerar a consciência social:

> A consciência social poderá explicar-se como sendo o que sentimos a respeito dos outros, constituído pelo conjunto de capacidades, tais como, o reconhecer no momento de contacto com outro indivíduo o seu estado de espírito, o compreender os seus sentimentos e pensamentos, apercebendo-se das situações sociais: empatia primária – estar em harmonia com o sentir do outro, aperceber-se de sinais emocionais não verbais; sintonia – ser um ouvinte atento; acuidade empática – compreender os pensamentos, sentimentos e intenções de outra pessoa; cognição social – conhecimento do funcionamento do mundo social. (GOLEMAN, 2016, p.132 apud SILVA, M. J. M. R. , 2010, p.26).

É sugerido que esta atividade seja feita após a atividade do Dilema do Prisioneiro, e na mesma turma.

Estima-se que a atividade dure em torno de 90 minutos, a turma deverá ser dividida em duplas, e cada aluno da dupla irá representar um jogador, podendo ser a mesma da atividade anterior, ou ser feito individualmente. Uma folha com a atividade 2, apêndice D, deverá ser entregue a cada dupla ou individuo, a leitura da atividade deverá ser feita de maneira coletiva, e as respostas serão escritas na mesma folha, é estimulado que façam em duplas para que possam debater as respostas entre si; após a leitura e debate entre as duplas, cada aluno irá oralizar para a turma, qual será a sua decisão frente ao dilema, o(a) professor(a) marcará na lousa a decisão de cada dupla, após marcar na lousa, seguidamente os alunos poderão verbalizar os motivos que os levou à suas decisões, após isso será mostrado na lousa, em forma de tabela a questão proposta, resultando na Tabela 10, e como isso pode ajudar a visualizar as possíveis escolhas, e qual seria a melhor escolha individual e a melhor escolha pensando na dupla, e se há o equilíbrio de Nash neste dilema.

8. Conclusões

Neste trabalho, foram apresentados os conceitos introdutórios de teoria dos jogos, que auxiliaram na compreensão do conteúdo e ajudaram a trilhar um caminho com os métodos de resolução de problemas para jogos estratégicos, até chegar ao equilíbrio de Nash. Foi utilizado como base teórica o livro de Fiani (2009): Teoria dos Jogos - Com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais.

Logo após um resumo da história da teoria dos jogos, foi desenvolvida uma seção, que em princípio, seria uma parte breve com a descrição dos conceitos introdutórios que evoluiria até conceito do equilíbrio de Nash, porém, foi indispensável compreender os demais métodos de resolução de jogos simultâneos, envolvendo desta forma o aprofundamento dos cálculos algébricos, o que tornou o trabalho muito desafiador e extenso.

Tendo em vista que não foi possível levar para a sala de aula as atividades, devido ao período de pandemia e alteração do calendário escolar, foram realizadas diversas leituras, além dos trabalhos de Nascimento (2014) e Pereira (2014), para encontrar indícios que poderiam vir a influenciar a tomada de decisão, que vão além da lógica, contribuindo na tentativa de responder a pergunta norteadora: Quais fatores, além da lógica matemática, podem influenciar o indivíduo na maneira que ele toma suas decisões?

A partir da atividade proposta por Nascimento (2014) e Pereira (2014) foram observadas as estratégias usadas pelos alunos para a resolução do problema e ficou evidente que não somente a lógica guiava suas decisões. Fatores como o medo e a lealdade foram identificados nos trabalhos de Nascimento (2014) e Pereira (2014), como influenciadores na tomada de decisão, conforme os trechos a seguir: "diziam que não valia a pena confessar, pois caso a dupla não confessasse pegariam apenas um ano de prisão, o que seria muito bom." (NASCIMENTO, 2014), "O jogo tem como ideia central o fato de dois prisioneiros terem de confessar um crime podendo um prejudicar o outro, fato não muito aceito na comunidade onde moram os alunos participantes da atividade." (NASCIMENTO, 2014) e "inicialmente o sentimento de negação era forte conforme começou a atividade, e que a tendência era não confessar, pois seria considerado uma traição" (PEREIRA, 2014).

Alguns artigos consultados apontam que o emocional afeta a tomada de decisão. De acordo com Dayrell (2001), os alunos são influenciados pelas experiências sociais paralelas a escola, também, Gouveia (2018) comenta que o emocional influencia o raciocínio lógico nas tomadas de decisões, e para Blanchette & Richards (2012) a natureza da atividade, influencia as escolhas dos envolvidos.

Finalmente, durante a pesquisa foram desenvolvidas duas atividades, adaptadas da dissertação de Nascimento (2014) e Pereira (2014), que podem ser utilizadas em sala de aula. A primeira atividade é o Dilema do Prisioneiro e a segunda é o Dilema do Contrato Social, essas atividades se encontram nos apêndices.

Este trabalho também abre possibilidades para que futuramente temas envolvendo a Teoria dos Jogos e a matemática, assim como outras disciplinas, possam ser levados para sala de aula e debatidos com os alunos.

REFERÊNCIAS

1. BLANCHETTE, I.; RICHARDS, A., **The influence of affect on higher level cognition: A review of research on interpretation, judgement, decision making and reasoning**. 24: 4, 561 — 595, 2012. Disponível em: < http://dx.doi.org/10.1080/02699930903132496> . Acesso em: 09 de ago. de 2021.

2. BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018.

3. DAYRELL, J. T., **A escola como espaço sociocultural**. In: _____ (org) Múltiplos olhares sobre educação e cultura. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 1996.

4. FIANI, R**., Teoria dos Jogos. Com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais**, 3 ed., Rio de Janeiro, Campus, 2009.

5. GOUVEIA, K. M. R., **Impacto das emoções na tomada de decisão em contexto financeiro**, Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Orientador: Mário Augusto Boto Ferreira, 2018.

6. POPPER, K., **Lógica das Ciências Sociais**, Rio de Janeiro, Tempo Brasileiro, 1999.

7. MYERSON, R. B., **Game Theory: Analysis of Conflict**, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1991.

8. NASCIMENTO, T. O., **Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio: Introdução ao equilíbrio de Nash**, Dissertação de Mestrado, PUC, Orientador: Débora Freire Mondaini, 2014.

9. SILVA, M. J. M. R., **A Inteligência Emocional como Factor Determinante nas Relações Interpessoais: Emoções, Expressões Corporais e Tomadas de Decisão**, Dissertação de Mestrado, Universidade Aberta, Orientadora: Felipa Cristina Henriques Rodrigues Lopes dos Reis, Lisboa, 2010.

10. PEREIRA, S. B., **Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio**, Dissertação de Mestrado, PUC, Orientador: Débora Freire Mondaini, 2014.

APÊNDICE A – Material do Professor

Componente Curricular: Matemática e Suas Tecnologias

Público-alvo: Ensino médio

Atividade 1 : O Dilema do Prisioneiro

TEMA: Teoria dos Jogos – Equilíbrio de Nash

TEMPO SUGERIDO: Em torno de 45 minutos.

COMPETÊNCIAS DO BNCC (2018) TRABALHADAS:
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

OBJETIVOS:

- Apresentar o equilíbrio de Nash em jogos não cooperativos.
- Identificar o raciocino lógico na tomada de decisão.

- Identificar se há limitações na tomada de decisão que se baseie puramente na lógica matemática.
- Levantar hipóteses do que pode influenciar na tomada de decisão.

SUGESTÃO:

Desenvolver a atividade 1 em conjunto com professores de outras disciplinas, como sociologia, filosofia, geografia e história; Para que possam auxiliar na intepretação dos anseios que os alunos trazem durante a atividade, e quais outros fatores podem influenciar na tomada de decisão. Podendo estender o debate para outras áreas de conhecimento, além da matemática.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Uma folha com a atividade 1 (apêndice B) para cada dupla.
- Lápis de escrever e borracha.
- Lousa e Giz.

DINÂMICA PROPOSTA DA REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE 1:

Para essa aula, o aluno deve ser capaz de ler e compreender enunciados matemáticos.

1. A turma deverá ser dividida em duplas, onde cada aluno irá representar um jogador.
2. Uma folha com a atividade 1, deverá ser entregue a cada dupla.
3. Será feita uma leitura da atividade 1 de maneira coletiva.
4. Após a leitura, cada aluno irá oralizar para a turma, qual será a sua decisão frente ao dilema, confessar ou não confessar.
5. Será marcado na lousa a decisão de cada dupla.
6. Após marcar na lousa as respostas de todos os alunos, será aberto espaço para que os alunos falem o que motivou suas decisões.
7. Será mostrado na lousa em forma de tabela a questão proposta na atividade 1, e de que forma essa representação pode ajudar a visualizar as possíveis escolhas, e qual seria a melhor escolha individual e a melhor escolha pensando na dupla.
8. Será mostrado o que é o equilíbrio de Nash e se há no dilema do prisioneiro.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1 : O Dilema do Prisioneiro

Dois criminosos praticam um crime juntos. São presos e interrogados separadamente. A polícia não tem provas contra eles e a única forma de condená-los é um delatar o outro. Cada prisioneiro tem uma escolha: calar ou acusar o companheiro. Se os dois ficarem quietos, ambos serão liberados. A polícia, querendo uma solução rápida para o caso, oferece alguns incentivos: o prisioneiro que denunciar o outro ganha a liberdade e ainda por cima leva uma recompensa em dinheiro. O outro pegará 5 anos de prisão. Qual a escolha lógica?

Observação:

Denunciar o companheiro = Confessar

Não Denunciar o companheiro = Não Confessar

INTEPRETAÇÃO DO DILEMA

A tabela que deve ser desenvolvida juntos aos alunos para compreender o problema:

TABELA : JOGO 1 – O DILEMA DO PRISIONEIRO : EQUILÍBRIO DE NASH

		JOGADOR B	
		CONFESSA	**NÃO CONFESSA**
JOGADOR A	**CONFESSA**	-5, - 5	0 + Recompensa, -5
	NÃO CONFESSA	- 5, 0 + Recompensa,	0, 0

Fonte: Autora (2021)

Onde tem-se:

- 2 Jogadores A (azul) e B (vermelho), com consequências iguais, seja de ganho ou de perda.

- Se o Jogador A

Confessar e:

O jogador B Confessar, o Jogador A terá como consequência 5 anos de prisão (representados pelo negativo, já que se pode considerar uma perda).

O jogador B Não Confessar, o Jogador A terá como consequência 0 anos de prisão e ganhará uma recompensa.

- Se o Jogador A

Não Confessar e:

O jogador B Confessar, o Jogador A terá como consequência 5 anos de prisão (representados pelo negativo, já que se pode considerar uma perda).

O jogador B Não Confessar, o Jogador A terá como consequência 0 anos de prisão, mas NÃO ganhará uma recompensa.

Como os jogadores não podem combinar as suas estratégias, não há garantias de que seu parceiro não irá confessar, então ele irá decidir individualmente qual estratégia trás melhor resultado para si, que no caso é a estratégia confessar, pois é a que tem o melhor ganho individualmente, que é sair livre e ganhar uma recompensa.

O Jogador B tem as mesmas estratégias que o Jogador A, confessar ou não confessar, então seu melhor ganho é igual ao ganho do Jogador A, que é sair livre e ganhar uma recompensa, então sua melhor estratégia é confessar.

Como ambos tem a estratégia confessar, como a que tem um melhor ganho, tem-se como um par ordenado de melhores estratégias de ambos os jogadores : {Confessar, Confessar}, que nesse caso resulta em {-5, -5}.

Neste caso, a busca pelo melhor resultado faz com ambos traiam seus parceiros ficando 5 anos presos cada.

E onde entra o equilíbrio de Nash?

Pela definição de Fiani (2009), equilíbrio de Nash é:

"Todas as estratégias adotadas por todos os jogadores sejam as melhores respostas às estratégias dos demais"

Ou seja, busca-se a melhor estratégia para si, a que traz mais ganhos, frente ao que os outros podem escolher, e os outros jogadores farão o mesmo, buscaram a melhor resposta, aquela que traz os melhores ganhos.

Então no dilema do prisioneiro que é utilizado na atividade 1, tem-se:

O equilíbrio de Nash, é onde a as melhores escolhas dos jogadores coincidem em uma mesma entrada (par ordenado), que é:

{Confessar, Confessar}, que nesse caso resulta em {-5, -5}.

AVALIAÇÃO:

- Durante a aula, observe se os alunos conseguem compreender a ideia que existe por trás do dilema do prisioneiro.
- Observe, também, como eles trabalham em grupo para chegar à conclusão de qual é a melhor escolha (estratégia), quando oralizarem o que motivou as decisões e após a construção da tabela para auxiliar na ilustração do dilema do prisioneiro, e se compreenderam o que é equilíbrio de Nash.

- Após a atividade, pergunte se eles consideram que apenas a lógica matemática poderia auxiliar nas tomadas de decisão, ou se tem alguma limitação. Se tiver, quais?
- Proponha que o tema seja levado para outras disciplinas, para ver as demais perspectivas desde dilema.

REFERÊNCIA:

ALMEIDA. Thais Oliveira de. **O Equilíbrio de Nash: uma perspectiva para jogos no ensino médio**. 2022. 73 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências) – Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema, 2022.

APÊNDICE B – Material do Aluno

Folha do aluno

Nome: ____ Jogador A

Nome: ____ Jogador B

Atividade 1: O Dilema do Prisioneiro

Dois criminosos praticam um crime juntos. São presos e interrogados separadamente. A polícia não tem provas contra eles e a única forma de condená-los é um delatar o outro. Cada prisioneiro tem uma escolha: calar ou acusar o companheiro. Se os dois ficarem quietos, ambos serão liberados. A polícia, querendo uma solução rápida para o caso, oferece alguns incentivos: o prisioneiro que denunciar o outro ganha a liberdade e ainda por cima leva uma recompensa em dinheiro. O outro pegará 5 anos de prisão. Qual a escolha lógica?

Observação:

Denunciar o companheiro = Confessar

Não Denunciar o companheiro = Não Confessar

Anotações:

APÊNDICE C– Material do Professor

Componente Curricular: Matemática e Suas Tecnologias

Público-alvo: Ensino médio

Atividade 2 : O Dilema do Contrato Social

TEMA: Teoria dos Jogos – O Dilema do Contrato Social

TEMPO SUGERIDO: Em torno de 90 minutos.

COMPETÊNCIAS DO BNCC (2018) TRABALHADAS:
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

OBJETIVOS:

- Identificar o raciocino lógico na tomada de decisão.

- Identificar se há limitações na tomada de decisão que se baseie puramente na lógica matemática.
- Levantar hipóteses do que pode influenciar na tomada de decisão, e de como a decisão de um jogador pode influenciar nos ganhos ou perdas de outros jogador.

SUGESTÃO:

Desenvolver a atividade 2 em conjunto com professores de outras disciplinas, como sociologia, filosofia, geografia e história; Para que possam auxiliar na intepretação dos anseios que os alunos trazem durante a atividade, e quais outros fatores podem influenciar na tomada de decisão. Podendo estender o debate para outras áreas de conhecimento, além da matemática.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Uma folha com a atividade 2 (apêndice D) para cada dupla.
- Lápis de escrever e borracha.
- Lousa e Giz.

DINÂMICA PROPOSTA PARA A ATIVIDADE:

Para essa aula, o aluno deve ser capaz de ler e compreender enunciados matemáticos.

1. A turma deverá ser dividida em duplas, podendo ser a mesma da atividade anterior, ou ser feito individualmente.
2. Uma folha com a atividade 2 deverá ser entregue a cada dupla/individualmente .
3. Será feita uma leitura da atividade 2 de maneira coletiva.
4. As respostas dos alunos serão escritas na mesma folha, é estimulado que façam em duplas para que possam debater as respostas entre si.
5. Em um segundo momento será partilhado as respostas com a sala e serão discutidas as respostas.

6. Será mostrado na lousa em forma de tabela a questão proposta na atividade 2, e de que forma essa representação pode ajudar a visualizar as possíveis escolhas, e qual seria a melhor escolha individual e a melhor escolha pensando na dupla.
7. Perguntar se há equilíbrio de Nash no dilema do contrato social.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 2 : O Dilema do Contrato Social

Suponha que dois alunos se reuniram para fazer uma atividade escolar com 50 exercícios de matemática. Sendo a atividade trabalhosa e extensa, nenhum dos dois conseguiriam fazer todos os exercícios sozinhos a tempo de entregar para o professor, precisando assim se ajudarem entre si.

Para que o trabalho se conclua com nota máxima é necessário que dividam os exercícios para que consigam entregar (todos os exercícios) na data pedida pelo professor. Na dupla, se cada um fizer 25 exercícios e juntar os exercícios (Num total de 50 exercícios), tirariam nota 10; porém, se entregarem individualmente 15 exercícios, tendo assim um menor esforço, tiraram nota 5, mas não teria como avisar o colega a tempo, e ele fazendo os 25 exercícios tiraria nota 7.

INTEPRETAÇÃO DO DILEMA

A tabela que deve ser desenvolvida juntos aos alunos para compreender o problema:

TABELA - JOGO 2: O DILEMA DO CONTRATO SOCIAL

		Aluno B	
		Entregar 15 Exercícios	**Entregar 25 Exercícios**
Aluno A	**Entregar 15 Exercícios**	5, 5	5, 7
	Entregar 25 Exercícios	7, 5	10, 10

Fonte: Autora (2021)

Onde tem-se:

- 2 Alunos A (azul) e B (vermelho), com consequências iguais, seja de ganho ou de perda.

- Se o Aluno A

Entregar 15 Exercícios e:

O Aluno B entregar 15 exercícios o Aluno A terá como consequência a nota 5.

O Aluno B entregar 25 exercícios, o Aluno A terá como consequência a nota 5

- Se o Aluno A

Entregar 25 Exercícios e:

Aluno B entregar 15 exercícios, o Aluno A terá como consequência a nota 7.

O Aluno B entregar 25 exercícios, o Aluno A terá como consequência a nota 10.

Como os alunos não terão como avisar a sua dupla quantos exercícios conseguiram fazer, antes de entregarem a atividade escolar, não há garantias de que seu colega conseguiu fazer para entregar os 25 exercícios combinados, então o Aluno A irá decidir individualmente qual estratégia trás melhor resultado para si, que no caso é entregar os 25 exercícios, pois é a que tem o melhor ganho individualmente.

O Aluno B tem as mesmas estratégias que o Aluno A, entregar 15 exercícios ou entregar 25 exercícios, então seu melhor ganho é igual ao ganho do Aluno A, que é entregar 25 exercícios.

Como ambos tem a estratégia entregar 25 exercícios, como a que tem um melhor ganho, tem-se como um par ordenado de melhores estratégias de ambos os alunos: {Entregar 25 Exercícios, Entregar 25 Exercícios}, que nesse caso resulta nas notas {10, 10}.

Note que neste caso, além da ideia de melhor resultado individual, a tomada de decisão de um jogador influência em seu próprio ganho e nos ganhos dos demais jogadores; aqui também envolve a ideia de cooperação, pois a partir do momento em que se pensa na situação como um todo, percebe-se que os ganhos podem ser otimizados para ambos os jogadores.

Nesta atividade pode-se observar se os alunos compreenderam os conceitos matemáticos envolvidos no dilema do prisioneiro, que é visto anteriormente, e se eles irão trazer para esta atividade proposta.

E onde entra o equilíbrio de Nash?

Pela definição de Fiani (2009), equilíbrio de Nash é:

"Todas as estratégias adotadas por todos os jogadores sejam as melhores respostas às estratégias dos demais"

Ou seja, busca-se a melhor estratégia para si, a que traz mais ganhos, frente ao que os outros podem escolher, e os outros jogadores farão o mesmo, buscaram a melhor resposta, aquela que traz os melhores ganhos.

Então no dilema do contrato social que é utilizado na atividade 2, tem-se:

O equilíbrio de Nash, é onde a as melhores escolhas dos jogadores coincidem em uma mesma entrada (par ordenado), que é:

{Entregar 25 Exercícios, Entregar 25 Exercícios }, que nesse caso resulta em {10, 10}.

Nesta atividade pode-se observar se os alunos compreenderam os conceitos matemáticos envolvidos no dilema do prisioneiro, que é visto anteriormente, e se eles irão trazer para esta atividade proposta. Ela também é interessante, pois envolve a ideia de cooperação e de como a tomada de decisão de um indivíduo, influência nos resultados do outro.

Nesse dilema, alguns fatores podem influenciar nessa escolha, na capacidade de cooperar ou não, podendo ser a busca pelo melhor resultado possível dentre as estratégias, de menor esforço individual, de lealdade, de empatia. Deve-se considerar a consciência social:

> A consciência social poderá explicar-se como sendo o que sentimos a respeito dos outros, constituído pelo conjunto de capacidades, tais como, o reconhecer no momento de contacto com outro indivíduo o seu estado de espírito, o compreender os seus sentimentos e pensamentos, apercebendo-se das situações sociais: empatia primária – estar em harmonia com o sentir do outro, aperceber-se de sinais emocionais não verbais; sintonia – ser um ouvinte atento; acuidade empática – compreender os pensamentos, sentimentos e intenções de outra pessoa; cognição social – conhecimento do funcionamento do mundo social. (GOLEMAN, 2016, p.132 apud SILVA, M. J. M. R. , 2010, p.26).

Para guiar as reflexões dos alunos, se propõe as seguintes perguntas:

1) Se ambos não se esforçam, o que ocorre?
2) Se um não se esforça, o que acontece com o outro?
3) Se ambos se esforçam, o que ocorre?
4) Monte uma tabela com os resultados do Jogo.
5) Este jogo possui uma decisão em conjunto benéfica para ambos? Se sim, qual?
6) O que você pensa da seguinte frase: “O melhor resultado depende da cooperação de todos. Se alguém buscar um resultado individual mais imediato, aqueles que se mantiverem fiéis ao compromisso inicial serão prejudicados.”

AVALIAÇÃO:

- Durante a aula, observe se os alunos conseguem compreender a ideia que existe por trás do dilema do contratos social.
- Observe, também, como eles trabalham em grupo para chegar à conclusão de qual é a melhor escolha (estratégia), quando oralizarem o que motivou as decisões e após a construção da tabela para auxiliar na ilustração do dilema do contrato social, e se compreenderam o que é equilíbrio de Nash.
- Após a atividade, pergunte se eles consideram que a cooperação pode influenciar nas tomadas de decisão, ou se tem alguma limitação. Se tiver, quais?
- Proponha que o tema seja levado para outras disciplinas, para ver as demais perspectivas desde dilema.

REFERÊNCIA:

ALMEIDA. Thais Oliveira de. **O Equilíbrio de Nash: uma perspectiva para jogos no ensino médio**. 2022. 73 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências) – Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema, 2022.

APÊNDICE D – Material do Aluno

Folha do aluno

Nome: ____

Nome: ____

Atividade 2: O Dilema do Contrato Social

Suponha que dois alunos se reuniram para fazer uma atividade escolar com 50 exercícios de matemática. Sendo a atividade trabalhosa e extensa, nenhum dos dois conseguiriam fazer todos os exercícios sozinhos a tempo de entregar para o professor, precisando assim se ajudarem entre si.

Para que o trabalho se conclua com nota máxima é necessário que dividam os exercícios para que consigam entregar (todos os exercícios) na data pedida pelo professor. Na dupla, se cada um fizer 25 exercícios e juntar os exercícios (Num total de 50 exercícios), tirariam nota 10; porém, se entregarem individualmente 15 exercícios, tendo assim um menor esforço, tiraram nota 5, mas não teria como avisar o colega a tempo, e ele fazendo os 25 exercícios tiraria nota 7.

<u>Com base nas informações acima, responda:</u>

1) Se ambos não se esforçam, o que ocorre?
2) Se um não se esforça, o que acontece com o outro?
3) Se ambos se esforçam, o que ocorre?
4) Monte uma tabela com os resultados do Jogo.
5) Este jogo possui uma decisão em conjunto benéfica para ambos? Se sim, qual?
6) O que você pensa da seguinte frase: “O melhor resultado depende da cooperação de todos. Se alguém buscar um resultado individual mais imediato, aqueles que se mantiverem fiéis ao compromisso inicial serão prejudicados.”