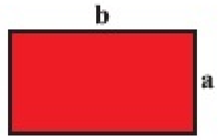
CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA

A Geometria é a parte mais antiga da Matemática e fundamentou todo o conhecimento básico, desde a Arquitetura até a Astronomia. Não tenho a intenção aqui de fazer um texto abordando todos os aspectos da Geometria, então tentarei fazer um breve resumo de alguns tópicos de Geometria Plana e Espacial, usando algumas tabelas com fórmulas como apoio.

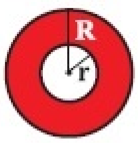
Comecemos relembrando como calcular perímetros (P) e áreas (A) de figuras planas (bidimensionais). É útil saber o cálculo de áreas de figuras planas, pois muitas vezes a integral de uma função de uma variável pode ser calculada mais facilmente pela área geométrica compreendida entre a função e o eixo x.

Para um retângulo de lados dados por a e b, a área é dada por $A = a \cdot b$ e o perímetro é dado pela soma dos lados, $P = 2a + 2b$. Caso os lados sejam iguais, estamos falando de um quadrado onde o lado $l = a = b$, e a área é então dada por $A = a^2 = b^2 = l^2$ e o perímetro é $P = 4a = 4b = 4l$.

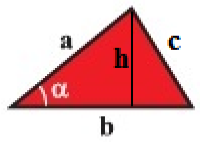


Para um círculo de raio R, a área é dada por $A = \pi R^2$ enquanto que o perímetro é dado por $P = 2\pi R$.

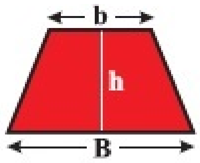
Para uma coroa circular de raio externo R e raio interno r, a área é dada por $A = \pi(R^2 - r^2)$, que é a área do círculo maior menos a área do círculo menor. Não falamos de perímetro da coroa circular; temos o perímetro externo que é $P_{ext} = 2\pi R$ e o perímetro interno que é $P_{int} = 2\pi r$.



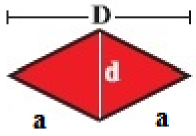
Para um triângulo, se conhecemos dois lados, a e b, e o ângulo α entre estes lados, a área é dada por $A = a \cdot b \cdot sen\alpha/2$. É fácil entender esta fórmula se pensarmos em a e b como dois vetores e lembrarmos que o módulo do produto vetorial entre eles é igual a duas vezes a área do triângulo. Podemos também usar a fórmula $A = b \cdot h/2$, se conhecermos a base b e a altura h do triângulo (a altura h faz um ângulo de 90º com a base b). O perímetro é simplesmente $P = a + b + c$. Ressaltamos que há muitas outras maneiras de calcular a área de um triângulo, dependendo das informações que se tenha sobre o mesmo.



Se a figura plana for um <u>trapézio</u>, de base maior B, base menor b e altura h, sua área é dada por $A = (B + b) \cdot h/2$. Aqui a altura h faz um ângulo de 90º tanto com a base menor quanto com a base maior.

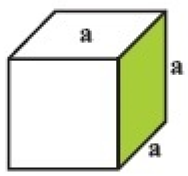


Para um <u>losango</u> de diagonal maior D e diagonal menor d, a área é dada por $A = D \cdot d/2$. Se cada lado tem comprimento a, o perímetro é então $4a$, como no caso do quadrado. Só para lembrar, tanto o quadrado quanto o losango possuem quatro lados iguais; a diferença é o ângulo entre dois lados adjacentes, que no caso do quadrado é fixa em 90º, enquanto que no losango pode assumir outros valores.

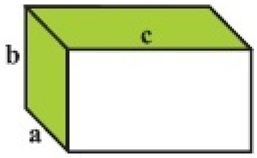


Vamos agora relembrar um pouco sobre **sólidos**. Quando falamos de sólidos é importante diferenciar o que é a área, A, do que é o volume, V. Vocês utilizarão muito estes conceitos em cálculo de funções de duas variáveis.

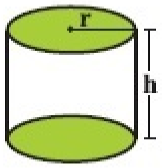
Em um <u>cubo</u>, a área total é a soma das seis áreas de cada face do cubo. Como cada uma destas faces tem área a^2, a área do cubo é $A = 6a^2$. Já o volume do cubo é dado pela multiplicação das três arestas, isto é, $V = a^3$.



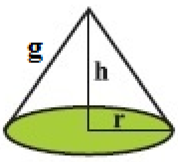
Para um paralelepípedo, a área total também é a soma das áreas das faces: há duas faces de área ab, duas faces de área bc e mais duas faces de área ac, de modo que a área do paralelepípedo é igual a $A = 2(ab + bc + ac)$. Seu volume é encontrado pela multiplicação dos três lados, isto é, $V = abc$.



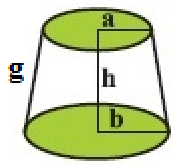
Para um cilindro, sua área total será a soma da área lateral com as áreas das duas bases. As bases são círculos, e então a área de cada base é πr^2; a área lateral é a multiplicação do perímetro do círculo da base, $2\pi r$, pela altura h do cilindro. Assim, a área total do cilindro é $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(h + r)$. Já o volume do cilindro obtém-se da multiplicação da área da base pela altura do cilindro, isto é $V = \pi r^2 h$.



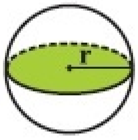
No caso de um cone, a área total é a soma da área lateral, dada por πrg, mais a área da base, dada por πr^2, resultando em $A = \pi r(g + r)$. Já o volume de um cone é um terço do volume de um cilindro reto com mesma base e mesma altura, isto é, o volume do cone é dado por $V = \pi r^2 h/3$.



Se tivermos um tronco de cone, aparece mais uma base que deve ser levada em conta no cálculo da área total, enquanto que a área lateral se modifica (repare a que grandezas se refere a letra g no cone completo e no tronco de cone). Então, a área total do tronco de cone é dada por $A = \pi a^2 + \pi b^2 + \pi g(a + b)$. Já o volume é dado por $V = \pi h\,(a^2 + ab + b^2)/3$.

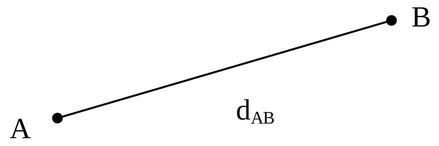


No caso de uma esfera de raio r, sua área é dada por $A = 4\pi r^2$ e seu volume é dado por $V = 4\pi r^3/3$.



Gostaria de terminar este resumo relembrando um pouquinho de Geometria Analítica Plana.

Como determinar a distância entre dois pontos A e B de coordenadas (x_A,y_A,z_A) e (x_B,y_B,z_B) respectivamente?



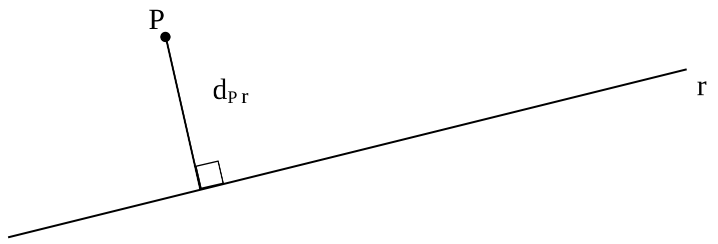
A distância entre os pontos A e B é dada pelo tamanho do segmento d_{AB} que une os dois pontos, dada por $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$. Note que podemos inverter a ordem das diferenças, já que estão ao quadrado, e obviamente a distância do ponto A ao ponto B é a mesma que do ponto B ao ponto A.

Exemplo: A distância entre os pontos A = (0,-1,0) e B = (-1,1,0) é dada por

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-(-1))^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$$

Consideremos agora uma reta r, cuja equação é ax + by + c = 0, e um ponto P de coordenadas (x_P,y_P), e queremos saber a distância do ponto à reta.



A distância entre o ponto e a reta é aquela menor possível, isto é, é o tamanho do segmento de reta que une o ponto P a um ponto qualquer da reta, formando 90º com a reta. Esta distância é dada por $d_{Pr} = \frac{|a\,x_P + b\,y_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

<u>Exemplo</u>: Dado o ponto P = (3, -6) e a reta r dada por 4x + 6y + 2 = 0, calcule a distância entre P e r.

$$d_{Pr} = \frac{|a\,x_P + b\,y_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4\cdot 3 + 6\cdot(-6) + 2|}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{|12 - 36 + 2|}{\sqrt{16+36}} = \frac{22}{\sqrt{52}} = \frac{22}{2\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}$$

Para saber mais:

http://www.ime.usp.br/~thiagoap/emancipa104/apostila_resumao_geometria.pdf

http://www.vestibular1.com.br/revisoes/matematica/formulas_geometria.pdf

Referências:

http://blog.educacaoadventista.org.br/professoraluciana/arquivos/formulario-de-geometria-espacial.pdf

http://www.vestibular1.com.br/revisoes/matematica/formulas_geometria.pdf

Figuras retiradas de http://www.prandiano.com.br/imgs/livpeq-exp-ensinomedio-e-cursinho.pdf